

# ♪ Corrigé du baccalauréat Polynésie 13 mars 2023 ♪

## Sujet 1

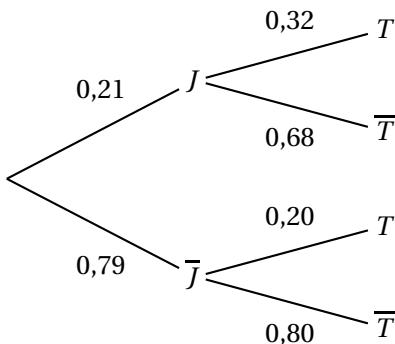
### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

#### EXERCICE 1 4 points

Thème : probabilités

#### Partie A

La situation peut se traduire par l'arbre pondéré suivant :



1. On calcule :  $p(J \cap T) = p(J) \times p_J(T) = 0,21 \times 0,32 = 0,0672.$
2. On a de même  $p(\bar{J} \cap T) = p(\bar{J}) \times p_{\bar{J}}(T) = 0,79 \times 0,20 = 0,158.$

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(T) = p(J \cap T) + p(\bar{J} \cap T) = 0,0672 + 0,158 = 0,2252.$$

3. Il faut trouver la probabilité conditionnelle :

$$p_T(J) = \frac{p(T \cap J)}{p(T)} = \frac{p(J \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0672}{0,2252} \approx 0,298, \text{ soit } 0,30 \text{ au centième près.}$$

#### Partie B

1. On suppose que la population de la ville est assez importante pour que la sélection de 120 personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise de 120 personnes chacune d'elles ayant une probabilité d'avoir moins de 35 ans de 0,30.

La loi de probabilité de  $X$  suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(120 ; 0,30)$ .

2. La calculatrice donne  $p(X \geq 50) = 1 - p(X \leq 49) \approx 0,0044.$

#### EXERCICE 2 5 points

Thème : géométrie dans l'espace

- a. L'équation paramétrique de  $d_2$  montre qu'elle contient le point de coordonnées  $(-3 ; 0 ; 5)$  et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de  $k$  donc  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- b. Les vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles.

- c. Une représentation paramétrique de la droite  $d_1$  est
- $$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels  $k$  et  $t$  tels que :

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2k - 3 \\ y = 3 - t = k \\ z = t = 5 \end{cases}$$

La dernière équation donne  $t = 5$ , puis la deuxième  $k = 3 - 5 = -2$  et en remplaçant dans la première  $2 + 5 = -4 - 3$  : cette égalité est fausse, donc  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas sécantes.

- d. Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

2. a. On a  $\vec{w} \cdot \vec{u} = -1 - 2 + 3 = 0$  ;  
de même  $\vec{w} \cdot \vec{v} = -2 + 2 + 0 = 0$ , donc le vecteur  $\vec{w}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

- b. Un point commun au plan  $P$  et à la droite  $d_2$  a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = k \\ z = 5 \\ 5x + 4y - z - 22 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ d'où en remplaçant } x, y, z \text{ dans la dernière équation :}$$

$$5(2k-3) + 4(k) - 5 - 22 = 0 \iff 10k - 15 + 4k - 27 = 0 \iff 14k = 42 \iff 7k = 21 \iff k = 3.$$

Le point commun au plan  $P$  et à la droite  $d_2$  a pour coordonnées  $(6 - 3; 3; 5)$  soit  $M(3; 3; 5)$ .

3. a.  $\Delta$  et  $d_1$  ont leurs vecteurs directeurs  $\vec{w}$  et  $\vec{u}$  orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.

Ces deux droites sont sécantes s'il existent des réels  $t$  et  $r$  tels que

$$\begin{cases} x = 2 + t = -r + 3 \\ y = 3 - t = 2r + 3 \\ z = t = 3r + 5 \end{cases}, t, r \in \mathbb{R}.$$

La dernière équation  $t = 3r + 5$  donne en remplaçant dans la deuxième :

$3 - 3r - 5 = 2r + 3 \iff -5 = 5r \iff r = -1$ , d'où  $t = 5 - 3 = 2$  et en remplaçant dans la première équation on obtient  $2 + 2 = 1 + 3$ , égalité vraie.

$\Delta$  et  $d_1$  sont sécantes au point  $L(4; 1; 2)$

- b. Conclusion : on a trouvé une droite  $\Delta$  perpendiculaire commune aux deux droites  $d_1$  et  $d_2$ .

### EXERCICE 3 5 points

### Thème : fonction exponentielle, algorithmique

1. **Affirmation :** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - x$  est convexe.

$f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $f'(x) = e^x - 1$ , puis  $f''(x) = e^x$ .

On sait que  $e^x > 0$  quel que soit  $x$ , donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . L'affirmation est vraie.

2. **Affirmation :** L'équation  $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$  admet  $\ln(3)$  comme unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

Cette équation se traduit par :

$$\begin{cases} 2e^x - 6 = 0 \text{ ou} \\ e^x + 2 = 0 \end{cases}$$

- On sait (voir ci-dessus) que  $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 2 > 2 > 0$ . Donc la deuxième équation n'a pas de solution.
- $2e^x - 6 = 0 \iff 2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$ , par croissance de la fonction logarithme népérien : c'est la seule solution donc l'affirmation est vraie.

### 3. Affirmation :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0.$$

On a  $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \frac{(1 - e^{-2x})}{(1 - xe^{-x})}$ .

- Au numérateur on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$ ;
- Au dénominateur  $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$  et l'on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - xe^{-x} = 1$ .

Le quotient a pour limite 1 et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , on a finalement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$  : l'affirmation est fausse.

### 4. La fonction $F$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x+1)e^{3x} = e^{3x}(2+6x+3) = (6x+5)e^{3x} = f(x).$$

D'autre part  $F(0) = 1e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$

$F$  est donc la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui prend la valeur 5 quand  $x = 0$ , l'affirmation est vraie.

### 5. L'exécution donne $\frac{1+9+\dots+5}{10} = \frac{50}{10} = 5$ .

L'affirmation est fausse.

## EXERCICE 4 6 points

## Thème : suites, fonctions

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = -1$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

#### 1. a. Démonstration par récurrence :

*Initialisation* : On a bien  $u_0 = 2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1$  : la relation est vraie au rang 0 ;

*Hérédité* : On suppose que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ .

Alors par définition de la suite  $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$  ou  $u_{n+1} = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$ .

La relation est vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie  $n \in \mathbb{N}$  elle l'est aussi au rang  $n + 1$ .

D'après le principe de récurrence :

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3, n \in \mathbb{N}.$$

#### b. On sait que $0 < 0,9 < 1$ implique que $0 < 0,9^n \leq 1$ puis en multipliant par $2 > 0$ ,

$0 < 2 \times 0,9^n \leq 2$  et enfin en ajoutant à chaque membre le nombre  $-3$  :

$$-3 < 0,9^n - 3 \leq -1, \text{ soit } -3 < u_n \leq -1.$$

- c. Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - 0,3 - u_n = -0,1u_n - 0,3$ .

Or l'encadrement trouvé précédemment  $-3 < u_n < -1$  donne par produit par  $-0,1$ ,  $0,1 < -0,1u_n < 0,3$  et en retranchant  $0,3$ ,  $-0,2 - 0,1u_n - 0,3 < 0$ .

Conclusion : quel que soit le naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n < 0$  : la suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

- d. La suite  $(u_n)$  décroissante et minorée par  $-3$  converge vers une limite  $\ell$ , avec  $\ell \geq -3$ .

D'autre part de l'égalité  $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ , sachant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ , on déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$ . La suite  $(u_n)$  converge vers  $-3$ .

2. On se propose d'étudier la fonction  $g$  définie sur  $]-3 ; -1]$  par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

- a. Justifications :

- $-3 < x \leq -1 \Rightarrow -1,5 < 0,5x \leq -0,5 \Rightarrow 0 < 0,5x + 1,5 \leq 1$ . Donc la fonction est définie sur  $]-3 ; -1]$

- La fonction  $g$  est dérivable sur  $]-3 ; -1]$  et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1 = \frac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x + 1,5} = \frac{-0,5x - 1}{0,5x + 1,5}.$$

On a vu ci-dessus que  $0,5x + 1,5 > 0$ , le signe de  $g'(x)$  est donc celui de  $-0,5x - 1$  :

- $g'(x) = 0 \iff -0,5x - 1 = 0 \iff -1 = 0,5x \iff -2 = x$ ;
- $g'(x) > 0 \iff -0,5x - 1 > 0 \iff -1 > 0,5x \iff -2 > x$ ;
- $g'(x) < 0 \iff -0,5x - 1 < 0 \iff -1 < 0,5x \iff -2 < x$ ;

Conclusion : la fonction est croissante sur  $]-3 ; -2]$  et décroissante sur  $[-2 ; -1]$ .

- On a  $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(0,5x + 1,5) = -\infty$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$

- $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = 0 + 1 = 1$ ;

$$\bullet g(-2) = \ln(-1 + 1,5) - (-2) = 2 + \ln 0,5 = 2 + \ln \frac{1}{2} = 2 - \ln 2 \approx 1,31.$$

- b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle  $]-3 ; -2]$ , la fonction  $g$  est strictement croissante de moins l'infini à  $g(-2) > 0$  et est continue sur cet intervalle : il existe donc un réel unique

$\alpha \in ]-3 ; -2]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

La calculatrice donne :

$$g(-2,9) \approx -0,957 \text{ et } g(-2,8) \approx 0,4974, \text{ d'où } -2,9 < \alpha < -2,8;$$

$$g(-2,89) \approx -0,01 \text{ et } g(-2,88) \approx 0,067, \text{ d'où } -2,89 < \alpha < -2,88;$$

$$g(-2,889) \approx -0,002 \text{ et } g(-2,888) \approx 0,006, \text{ d'où } -2,889 < \alpha < -2,888.$$

3. a. Que que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$  et en utilisant la formule du 1.a.,  $v_n = \ln(0,5(2 \times 0,9^n - 3) + 1,5) = \ln(0,9^n - 1,5 + 1,5) = \ln 0,9^n = n \ln 0,9$ .

L'égalité  $v_n = n \ln 0,9$ , montre que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\ln 0,9$ .

- b. On a  $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$ .

- c. On a donc  $g(u_n) = 0 \iff u_n = \alpha$ , soit  $2 \times 0,9^n - 3 = \alpha$ .

Or on a vu que  $-2,889 < \alpha < -2,888$  : on en déduit que  $-2,889 < 2 \times 0,9^n - 3 < -2,888$ , soit en ajoutant 3 :

$0,111 < 2 \times 0,9^n < 0,112 \iff 0,0555 < 0,9^n < 0,0556$  soit par croissance du logarithme népérien  $\ln 0,0555 < n \ln 0,9 < \ln 0,0556$  et enfin  $\frac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} < n < \frac{\ln 0,0555}{\ln 0,9}$  (car  $\ln 0,9 < 0$ ).

$$\text{Or } \frac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} \approx 27,4 \text{ et } \frac{\ln 0,0555}{\ln 0,9} \approx 27,5.$$

On aurait donc un entier  $n$  tel que  $27,4 < n < 27,5$ . Donc  $n$  ne peut être un naturel.

Conclusion : il n'existe pas  $k$  tel que  $u_k = \alpha$ .

- d. On a vu que  $u_n = \alpha \iff g(u_n) = 0 \iff u_n = v_n$ . On vient de voir que ceci n'est pas possible : il n'existe pas  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $v_k = u_k$ .