

# ♪ Corrigé du baccalauréat LA RÉUNION - 28 mars 2023 ♪

## Sujet 1

### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

#### EXERCICE 1

**5 points**

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les événements suivants :

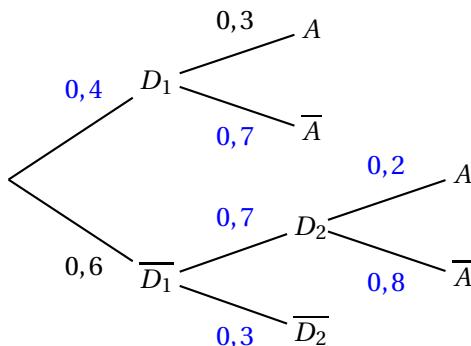
$D_1$  : « la personne décroche au premier appel »;

$D_2$  : « la personne décroche au deuxième appel »;

$A$  : « la personne achète le produit ».

#### Partie A

1. On complète l'arbre pondéré.



2. En utilisant les propriétés de l'arbre pondéré, on a :

$$P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,204$$

3. On sait que la personne a acheté le produit.

La probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est :

$$P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} \approx 0,588$$

#### Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,204.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.

On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

a. On admet que  $X$  suit une loi binomiale; ses paramètres sont  $n = 30$  et  $p = 0,204$ .

b. La probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit est :

$$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx 0,179$$

c. L'espérance de la variable aléatoire  $X$  est  $E(X) = np = 30 \times 0,204 = 6,12$ .

Donc pour chaque échantillon de 30 personnes, il y en a en moyenne 6,12 qui achètent le produit.

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère désormais un échantillon de  $n$  personnes.

La plus petite valeur de  $n$  telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99 est le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $P(X \geq 1) \geq 0,99$ . On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \geq 0,99 &\iff 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \iff 0,01 \geq P(X = 0) \\ &\iff 0,01 \geq \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n \iff 0,01 \geq 0,796^n \\ &\iff \ln(0,01) \geq \ln(0,796^n) \iff \ln(0,01) \geq n \ln(0,796) \iff \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \leq n \end{aligned}$$

Or  $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,2$  donc la valeur de  $n$  cherchée est 21.

## EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$ .

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde. On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On cherche les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

• On sait que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3x + 1 - 2x \ln(x)) = 1$  et donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ .

•  $f(x) = x(3 - 2 \ln(x)) + 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln(x)) = -\infty.$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln(x)) = -\infty$  et donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

2. a. Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = 3 + 0 - 2 \times \ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2 \ln(x) - 2 = 1 - 2 \ln(x)$ .

b. On étudie le signe de  $f'$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

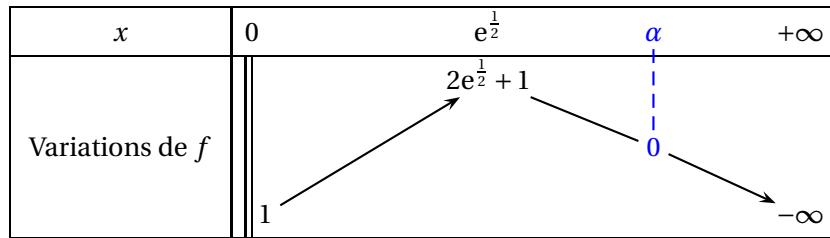
$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \frac{1}{2} > \ln(x) \iff x < e^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3.$$

On en déduit le tableau des variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

$x$	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signe de $f'$	+	0	-
Variations de $f$	1	$2e^{\frac{1}{2}} + 1$	$-\infty$

3. a. Le maximum de la fonction  $f$  vaut  $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ ; on complète le tableau des variations de  $f$ .

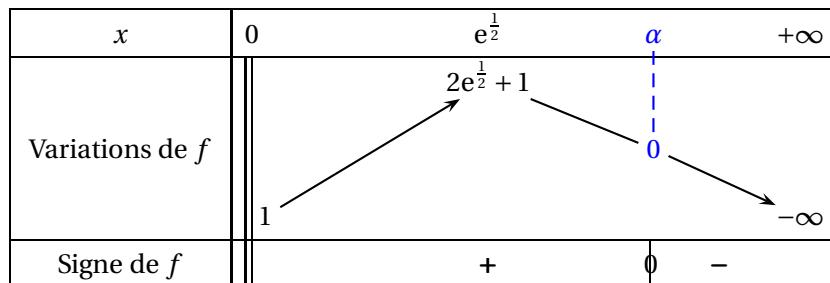


La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc continue sur cet intervalle.

- Sur l'intervalle  $]-\infty, e^{\frac{1}{2}}[$ , la fonction  $f$  est strictement positive donc l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution.
- Sur l'intervalle  $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle  $\alpha$ .

On en déduit que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ , et que cette solution appartient à l'intervalle  $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$ .

- b. Le signe de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  est donné par le tableau :



Donc  $f(x) > 0$  sur  $]0; \alpha[$ ,  $f(\alpha) = 0$  et  $f(x) < 0$  sur  $\alpha; +\infty[$ .

4. On considère une primitive quelconque de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . On la note  $F$ . La fonction  $F$  a pour dérivée la fonction  $f$  qui est positive sur  $[e^{\frac{1}{2}}, \alpha]$ ; donc  $F$  est croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée.

5. a. Pour étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on calcule la dérivée seconde  $f''$  :
- $$f''(x) = 0 - 2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} < 0 \text{ sur } ]0; +\infty[; \text{ on en déduit que la fonction } f \text{ est concave sur } ]0; +\infty[ \text{ et que sur cet intervalle, la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est située au dessous des ses tangentes.}$$

- b. Soit  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.

$T$  a pour équation  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ .

- $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$  donc  $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4$
- $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$  donc  $f'(1) = 1 - 2 \times \ln(1) = 1$

Donc  $T$  a pour équation  $y = 1(x - 1) + 4$  soit  $y = x + 3$ .

- c. La courbe  $\mathcal{C}$  est en dessous de ses tangentes donc de la tangente  $T$  et donc, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a  $f(x) \leq x + 3$ .

$$\begin{aligned} f(x) \leq x + 3 &\iff 3x + 1 - 2x \ln(x) \leq x + 3 \iff 2x - 2 \leq 2x \ln(x) \iff \frac{2x}{2x} - \frac{2}{2x} \leq \ln(x) \\ &\iff 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :  $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ .

**EXERCICE 3****5 points**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$ .

**Partie A**

1. La valeur de  $u_2$  est égale à :

a.  $\frac{11}{4}$   
c. 3,5

b.  $\frac{13}{2}$   
d. 2,7

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = \frac{5}{2} \\ u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4} \end{array} \right.$$

**Réponse a.**

2. La suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - n$  est :

- a. arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$   
c. constante.  
b. géométrique de raison  $\frac{1}{2}$   
d. ni arithmétique, ni géométrique.

$$\left| \begin{array}{l} v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n \end{array} \right.$$

Donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

**Réponse b.**

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

$n$  désigne un entier naturel non nul.

On rappelle qu'en langage Python « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à  $n - 1$ .

1	<code>def terme (n)</code>
2	<code>    U=3</code>
3	<code>    for i in range(n) :</code>
4	<code>        .....</code>
5	<code>    return U</code>

Pour que `terme (n)` renvoie la valeur de  $u_n$ , on peut compléter la ligne 4 par :

- a.  $U = U/2 + (i+1)/2+1$   
c.  $U = U/2 + (i-1)/2+1$   
b.  $U = U/2 + n/2 + 1$   
d.  $U = U/2 + i/2 + 1$

$\parallel$  Pour  $i = 0$ , il faut calculer  $u_1$  ; la seule formule valable est :  $U = U/2 + i/2 + 1$ . **Réponse d.**

**Partie B**

1. On va démontrer par récurrence pour tout entier naturel  $n$  la propriété  $\mathcal{P}_n$  :  $n \leq u_n \leq n+3$ .

• **Initialisation**

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 3$  donc  $0 \leq u_0 \leq 0+3$ .

La propriété est vraie au rang 0.

• **Héritéité**

Supposons la propriété vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire  $n \leq u_n \leq n+3$  ; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} n \leq u_n \leq n+3 &\iff \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n \\ &\iff n \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \leq n + \frac{3}{2} \iff n+1 \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 \leq n + \frac{3}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\iff n+1 \leq u_{n+1} \leq n+\frac{5}{2}$$

Or  $\frac{5}{2} \leq 4$ , donc on a :  $n+1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)+3$ .

Donc la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $n \leq u_n \leq n+3$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ; or pour tout  $n$ , on a  $n \leq u_n$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. Pour tout  $n$ , on a  $n \leq u_n \leq n+3$  donc, pour tout  $n$  non nul, on a  $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

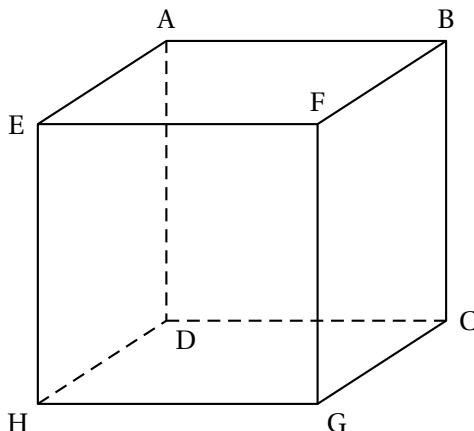
Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 1.

**EXERCICE 4**

**5 points**

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que  $AB = 1$ .

On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé  $(D; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ .

1. On a :  $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Le point M est le centre de la face BCGF donc c'est le milieu de [CF] ; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de C et de F :

$$\text{M a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{x_C+x_F}{2} \\ \frac{y_C+y_F}{2} \\ \frac{z_C+z_F}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} \\ \frac{1+1}{2} \\ \frac{0+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le point N est le centre de la face EFGH donc c'est le milieu de [FH] ; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de F et de H :

$$\text{N a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{x_F+x_H}{2} \\ \frac{y_F+y_H}{2} \\ \frac{z_F+z_H}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+0}{2} \\ \frac{1+0}{2} \\ \frac{1+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. a. Le plan (HFC) a pour vecteurs directeurs  $\vec{HF}$  et  $\vec{CF}$  car les points H, F et C ne sont pas alignés.

$$\vec{HF} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CF} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AG} \cdot \vec{HF} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{AG} \perp \vec{HF}$$

$$\vec{AG} \cdot \vec{CF} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{AG} \perp \vec{CF}$$

Le vecteur  $\vec{AG}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (HFC) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

- b. Le plan (HFC) passe par le point F et a pour vecteur normal  $\vec{AG}$ , c'est donc l'ensemble des points X de coordonnées  $(x, y, z)$  tels que  $\vec{FX} \perp \vec{AG}$ .

$$\vec{FX} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{FX} \perp \vec{AG} &\iff \vec{FX} \cdot \vec{AG} = 0 \iff (x-1) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z-1) \times (-1) = 0 \\ &\iff x-1 + y-1 - z+1 = 0 \iff x+y-z-1 = 0 \end{aligned}$$

Le plan (HFC) a donc pour équation cartésienne :  $x+y-z-1=0$ .

4. La droite (AG) a pour vecteur directeur  $\vec{AG}$   $(1, 1, -1)$  et passe par le point A de coordonnées  $(0, 0, 1)$ ; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + 1 \times t \\ y = y_A + 1 \times t \\ z = z_A + (-1) \times t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

5. Soit R le projeté orthogonal de G sur le plan (HFC). donc R appartient au plan (HFC).

De plus, comme la droite (AG) est orthogonale au plan (HFC), le point R appartient à la droite (AG).

$$\text{Les coordonnées de R vérifient donc le système : } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a donc } t + t - (1 - t) - 1 = 0 \text{ donc } 3t = 2 \text{ donc } t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc R a pour coordonnées } x_R = t = \frac{2}{3}, y_R = t = \frac{2}{3}, z_R = 1 - t = \frac{1}{3}, \text{ soit } \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

6. Une représentation paramétrique de la droite (FG) est :  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ .

On cherche un point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

K est un point de (FG) donc ses coordonnées sont de la forme  $(1, 1, t)$ .

De plus, le triangle KMN est rectangle en K donc  $\vec{MK} \perp \vec{NK}$  donc  $\vec{MK} \cdot \vec{NK} = 0$ .

$$\vec{MK} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 1 \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{NK} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{MK} \cdot \vec{NK} = 0 \iff \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + \left( t - \frac{1}{2} \right) \times \left( t - \frac{1}{2} \right) = 0 \iff \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \iff t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Le point K a donc pour coordonnées } \left( 1, 1, \frac{1}{2} \right).$$

7. Le tétraèdre FNKM a pour hauteur [FK] et pour base le triangle KMN.

- F a pour coordonnées  $(1, 1, 1)$  et K a pour coordonnées  $(1, 1, \frac{1}{2})$ ; donc  $FK = \frac{1}{2}$ .
- L'aire du triangle rectangle KMN est  $\frac{KM \times KN}{2}$ .
  - M  $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$  et K  $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$  donc  $KM = \frac{1}{2}$
  - N  $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et K  $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$  donc  $KN = \frac{1}{2}$

L'aire du triangle KMN est donc  $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$ .

- Le volume d'un tétraèdre est, en unité de volume :  $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$ .

Le volume du tétraèdre FNKM est donc :  $\frac{(\text{aire de KMN}) \times FK}{3} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{48}$ .

Le volume du cube est 1, celle du tétraèdre FNKM est  $\frac{1}{48}$  donc le volume du tétraèdre représente un quarante-huitième du volume du cube.

