

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1

4 points

$A(2 ; 1 ; -1)$, $B(-1 ; 2 ; 1)$ et $C(5 ; 0 ; -3)$.

On note \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne : $x + 5y - 2z + 3 = 0$.

On note \mathcal{D} la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 :

On a $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points O, A et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

D'autre part : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 + 0 - 2 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OC} = 5 + 0 - 6 = -1$; conclusion le vecteur \overrightarrow{n} est orthogonal au vecteur \overrightarrow{OA} du plan (OAC) mais n'est pas orthogonal au vecteur \overrightarrow{OC} de ce même plan; il n'est donc pas normal au plan (OAC) : l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 :

On cherche la représentation paramétrique de (AB). On a :

$M(x ; y ; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient :

$M(x ; y ; z) \in (AB) \iff \begin{cases} x - 2 = -3u \\ y - 1 = 1u \\ z + 1 = 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2 - 3u \\ y = 1 + u \\ z = -1 + 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$.

Donc $M(x ; y ; z) \in (AB) \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} 2 - 3u = 3 - t \\ 1 + u = 2 + t \\ -1 + 2u = 1 + 2t \end{cases}$

La deuxième équation donne $u = t + 1$ et en remplaçant u par $t + 1$ dans les deux autres on obtient le système :

$$\begin{cases} u = t + 1 \\ 2 - 3(t + 1) = 3 - t \\ -1 + 2(1 + t) = 1 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} u = t + 1 \\ 2 - 3t - 3 = 3 - t \\ -1 + 2 + 2t = 1 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} u = t + 1 \\ -4 = 2t \\ 1 = 1 \end{cases} :$$

d'où $t = -2$ et $u = t + 1 = -2 + 1 = -1$.

En remplaçant t ou u dans l'une des équations paramétriques de (AB) ou (D) on obtient le point commun de coordonnées $(5 ; 0 ; -3)$, donc le point C.

Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :

Si un point $M(x ; y ; z)$ est commun à la droite \mathcal{D} et au plan \mathcal{P} ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de \mathcal{D} et l'équation cartésienne de \mathcal{P} , donc le système :

$$\begin{cases} x &= -t + 3 \\ y &= t + 2 \\ z &= 2t + 1 \\ x + 5y - 2z + 3 &= 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

D'où en remplaçant dans l'équation du plan x, y et z par leurs valeurs en fonction de t :

$-t + 3 + 5(t + 2) - 2(2t + 1) + 3 = 0 \iff -t + 3 + 5t + 10 - 4t - 2 + 3 = 0 \iff 0t = -14$ cette équation n'a pas de solution : \mathcal{D} et \mathcal{P} sont parallèles (strictement) ; l'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 :

- Le milieu H de $[BC]$ a pour coordonnées $H\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{1-3}{2}\right)$, soit $H(2; 1; -1)$.

$$3x_H - y_H - 2z_H - 7 = 3 \times 2 - 1 - 2 \times (-1) - 7 = 0 \text{ donc } H \in Q.$$

- Le vecteur \overrightarrow{BC} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 0 - 2 \\ -3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le plan Q a pour vecteur normal le vecteur $\vec{\nu}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{\nu}$ donc le vecteur \overrightarrow{BC} est normal au plan Q .

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2

5 points

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 0,02y = m$.

Partie A

- On sait que l'équation différentielle $y' + 0,02y = 0$ a pour solutions les fonctions

$$t \mapsto y = k e^{-0,02t}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

D'autre part une fonction constante $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de (E) (avec donc $y' = 0$) si $0 + 0,02\alpha = m \iff 0,02\alpha = m \iff \alpha = \frac{m}{0,02} = 50m$.

Conclusion : toutes les solutions de (E) sont les fonctions définies par

$$t \mapsto y = k e^{-0,02t} + 50m, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

- On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,02t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} k e^{-0,02t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} k e^{-0,02t} + 50m = 50m$.

Or on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} k e^{-0,02t} + 50m = 30$, donc $m = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$.

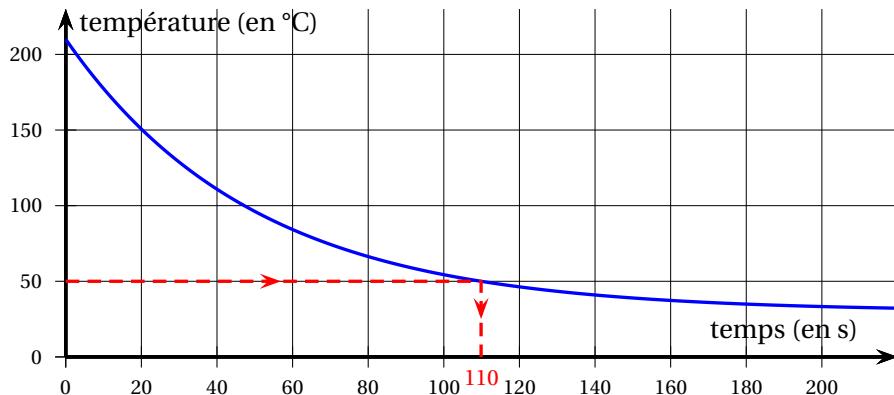
- Avec $50m = 50 \times 0,6 = 5 \times 6 = 30$, les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $t \mapsto f(t) = k e^{-0,02t} + 30$

On a $f(0) = 210 \iff k \times 1 + 30 = 210 \iff k = 180$.

Finalement : $f(t) = 180 e^{-0,02t} + 30$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(t) = 180 e^{-0,02t} + 30$.



1. a. On lit sur le graphique $T \approx 110$ (s).

$$b. f(T) = 50 \iff 180 e^{-0,02T} + 30 = 50 \iff 180 e^{-0,02T} = 20$$

$$\iff 20 \times 9 e^{-0,02T} = 20 \times 1 \iff 9 e^{-0,02T} = 1 \iff e^{-0,02T} = \frac{1}{9}$$

$$\iff -0,02T = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \text{ par croissance de la fonction logarithme}$$

$$\text{népérien}) \iff -0,02T = -\ln 9 \iff 0,02T = \ln 9$$

$$\iff T = \frac{\ln 9}{0,02}$$

$$\text{Donc } T = \frac{\ln 9}{0,02} = 50 \ln 9 \approx 109,86.$$

2. La valeur moyenne \bar{t} de la température sur les 100 premières secondes est :

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{100} \int_0^{100} (180 e^{-0,02t} + 30) dt = \frac{1}{100} \left[-\frac{180}{0,02} e^{-0,02t} + 30t \right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100} [-9000 e^{-0,02t} + 30t]_0^{100} = \frac{1}{100} [-9000 e^{-2} + 9000 + 3000] \\ &= \frac{1}{100} [9000(1 - e^{-2}) + 3000] = 90(1 - e^{-2}) + 30 \approx 107,82 \end{aligned}$$

soit environ 107,8 (°C).

Exercice 3

5 points

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée donc il s'agit d'une répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes; la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face » suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.

$$2. P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
 - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée;
 - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les événements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».

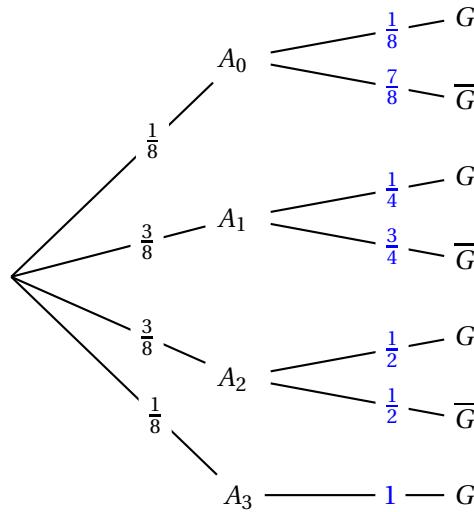
Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les événements :

- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. $P_{A_1}(G)$ est la probabilité de l'événement « on a gagné sachant que lors du premier lancer, on a obtenu une fois « Face ». C'est donc la probabilité qu'au deuxième lancer, les deux pièces tombent sur « Face ».

Il y a 4 résultats équiprobables possibles : PP - PF - FP - FF, dont un seul favorable; la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{4}$.

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. D'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
 p &= P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G) \\
 &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1+6+12+8}{64} = \frac{27}{64}
 \end{aligned}$$

4. La partie a été gagnée. La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative est :

$$P_G(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Les parties sont à chaque fois indépendantes et la probabilité de gagner est à chaque fois égale à $\frac{27}{64}$. Pour n parties jouées, on appelle Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{27}{64}$.

$$P(Z = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1 - \frac{27}{64}\right)^n = \left(\frac{37}{64}\right)^n \text{ donc } P(Z \geq 1) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n.$$

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z \geq 1) > 0,95$.

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned}
 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n > 0,95 &\iff \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0,05 \\
 &\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) < \ln(0,05) \text{ (croissance de la fonction ln)} \\
 &\iff n \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0,05) \\
 &\iff n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \text{ car } \frac{1}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} < 0
 \end{aligned}$$

Or la calculatrice donne $\frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5,46$. Il faut donc faire au moins 6 parties.

Exercice 4

6 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n .

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \frac{4}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$.
 À la seconde on trouve $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1,333$.
 3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .

```
» suite(2)
1.333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty ; 5[$ par : $f(x) = \frac{4}{5-x}$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérивables sur $]-\infty ; 5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty ; 5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$.

Comme $f(1) = \frac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \frac{4}{5-4} = 4$, on obtient $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

3. a. Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty ; 5[$.

On a pour $x < 5$:

$$f(x) = x \iff \frac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty ; 5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff \begin{cases} x-1 = 0 \\ x-4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

La solution 4 est vraisemblable puisque $x \leq 4$, on a donc $S = \{1 ; 4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} \leq u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante;
- $1 \leq u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell \geq 1$.

Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0 = 3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

5. Avec $u_0 = 4$, on a $u_1 = \frac{4}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$ et donc en répétant le calcul $u_n = 4$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4, elle converge vers 4.