Baccalauréat Asie 11 juin 2024

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5,5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.

   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

   Résoudre, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 — 5,5 points

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de $0,2$.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

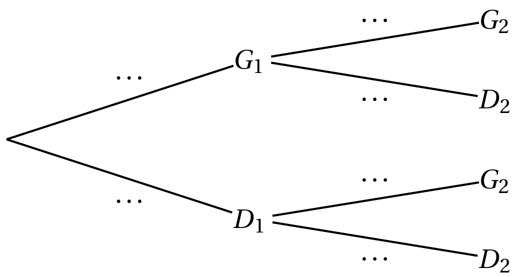
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée »;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?

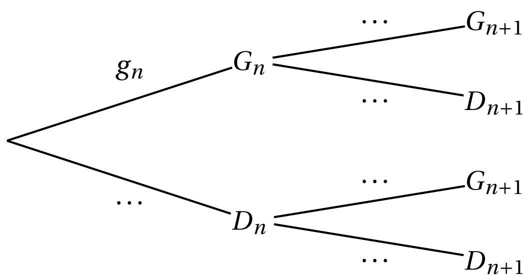
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1 def seuil(e) :
2     g = 0.5
3     n = 1
4     while ... :
5         g = 0.5 * g + 0.2
6         n = ...
7     return (n)
```

EXERCICE 3 **4 points**

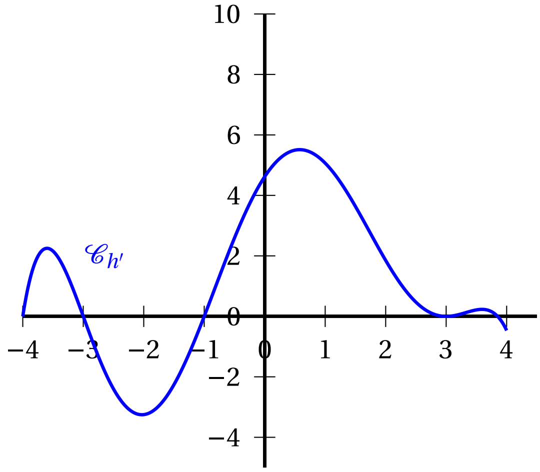
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

Affirmation 1 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-4 ; 4].
La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\ ;\ 3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

   Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.'

4. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

   Affirmation 4 : La fonction f est une solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = x.$$

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : \quad 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,1)\ ,\ \mathrm{B}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)\ \text{et}\ \mathrm{C}(-4\ ;\ -6\ ;\ 5)\ .$$

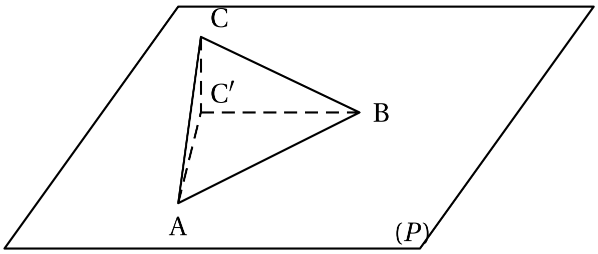
Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $\mathrm{C}'(0\ ;\ -2\ ;\ -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

   $$\begin{cases} \mathrm{H} \in (\mathrm{AB}) \\ (\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{HC}) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$

   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ sont : $\overrightarrow{\mathrm{HC}}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\ -\frac{11}{2}\\ 4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HC}}\right\|$.

2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $\mathrm{HC}' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{\mathrm{CHC}'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.

2. **a.** Montrer que les droites $(\mathrm{C'H})$ et (AB) sont perpendiculaires.

b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.

c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.