UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
Site web : officedubac.sn

21G26NA0152
Durée: 4 heures
Séries :S2-S2A-S4-S5-coef 5

Epreuve du 1er groupe

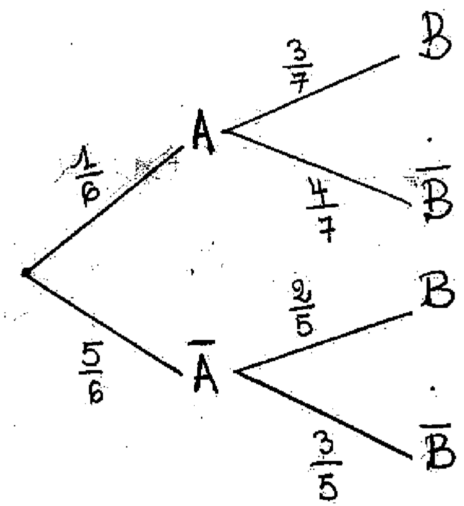
MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (cf. Circulaire n° 5990/OB/Dir. Du 12.08.1988).

CORRIGE

EXERCICE 1

1)



2) $p(A) = \frac{1}{6}$; $p(\bar{A}) = 1 - p\,(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3) Soit Ω l'univers

$B \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad b = \cap\ \Omega\ ; \quad A \cup \bar{A} = \Omega\ ; \quad \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap (A \cup \bar{A})$

$\Longrightarrow\ B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})\ ;\ (B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = B \cap A \cap \bar{A} = B \cap \phi = \phi$

$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(A)\,p(B/A) + p(\bar{A})\,p(B/\bar{A})$

$p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{14} + \frac{1}{3} = \frac{17}{42}$

4) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)\,p(B/A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{7}}{\frac{17}{42}}$

$p(A\,/\,B) = \frac{\frac{3}{42}}{\frac{17}{42}} = \frac{3}{17}$

5) a) On a une suite d'épreuves de Bernoulli. L'expérience est répétée 5 fois et n'a que 2 issues : le succès ou l'échec.
Le succès (S) : « obtenir une boule blanche »
L'échec (E) : « obtenir une boule non blanche »

$p(S) = p = p(B) = p\ \frac{17}{42}$; $p(E) = 1 - p$

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des valeurs possibles de X.

$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\forall\, k \in \mathcal{U},\ p\,(X = k) = C_5^k\, p^k\,(1-p)^{5-k} = C_5^k \left(\frac{17}{42}\right)^k \left(1 - \frac{17}{42}\right)^{5-k}$

$p(X = k\,) = C_5^k \left(\frac{17}{42}\right)^k \left(\frac{25}{42}\right)^{5-k}$; $k \in \mathcal{U}$

b) $E\,(X) = n\,p = 5 \times \frac{17}{42} = \frac{85}{42}$; $V\,(X) = n\,p\,(1-p) = 5 \times \frac{17}{42} \times \frac{25}{42} = \frac{2125}{1764}$

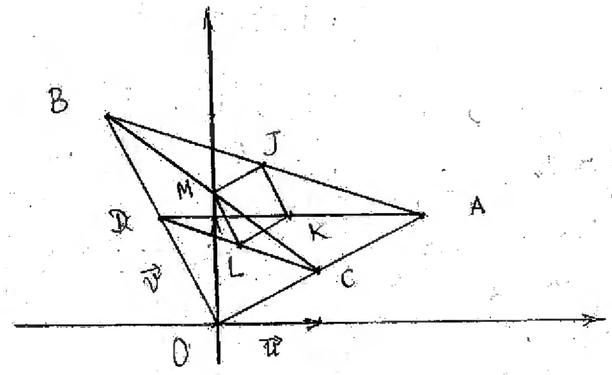
6) Soit C l'évènement « obtenir au moins une boule blanche ».
Alors $\bar{C}$ est l'évènement « obtenir n boules non blanches ».
$p(\bar{C}) = (1-p)^n = \left(\frac{25}{42}\right)^n$; $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \left(\frac{25}{42}\right)^n$
$p(C) > 0{,}99 \iff 1 - \left(\frac{25}{42}\right)^n > 0{,}99 \iff 1 - 0{,}99 > \left(\frac{25}{42}\right)^n$
$\iff 0{,}01 > \left(\frac{25}{42}\right)^n \iff \ln(0{,}01) > \ln\left(\frac{25}{42}\right)^n$
$\iff \ln(0{,}01) > n\ln\left(\frac{25}{42}\right) \iff \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{25}{42}\right)} < n$
$\iff n > 8{,}876\ldots$ $or\ n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 9$.
La valeur minimale de n est $n_0 = 9$.

EXERCICE 2

1) a) $a(1+i) = 1+3i \implies a = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$
$i\,a^2 = i\,(2+i)^2 = i\,(3+4\,i) = -4+3i$
b) $a^2 - (1+3i)\,a - 4 + 3i = (2+i)^2 - (1+3i)(2+i) - 4 + 3i$
$= 3 + 4i + 1 - 7i - 4 + 3i = 0$, donc a est solution de l'équation.

$(i\,a)^2 - (1+3i)(i\,a) - 4 + 3i = -a^2 - i\,(1+3i)a - 4 + 3i$
$= -3 - 4i + i\,(1 - 7\,i) - 4 + 3i$
$= -3 - 4i + i + 7 - 4 + 3i = 0$, donc $i\,a$ est une solution de l'équation.

2) a)



b) $i\,a = i\,(2+i) = -1+2i$ et $b = -1+2i$, donc $b = i\,a$.
$OA = |a|$; $OB = |b| = |i\,a| = |i|\,|a| = 1|a| = |a|$
$OA = |a|$ et $OB = |a|$; donc $OA = OB$
$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{i\,a}{a}\right) = arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
$OA = OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc OAB est un triangle rectangle isocèle de sommet principal O

3) a) OCD est isocèle et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OC = OD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow |c| = |d|$ et $\arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{|d|}{|c|} = 1$ et $\arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{d}{c}\right| = 1$ et $arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d}{c} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{d}{c} = i$

$\Rightarrow d = i\,c \Rightarrow d = i\left(1 + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow d = -\frac{1}{2} + i$

b) J milieu de $[AB] \Rightarrow z_J = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(2 + i - 1 + 2i) = \frac{1}{2}(1+3i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

K milieu de $[DA] \Rightarrow z_K = \frac{1}{2}(a+d) = \frac{1}{2}\left(2 + i - \frac{1}{2} + i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2i\right) = \frac{3}{4} + i$

L milieu de $[CD] \Rightarrow z_L = \frac{1}{2}(c+d) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

M milieu de $[BC] \Rightarrow z_M = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}\left(-1 + 2i + 1 + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}i\right) = \frac{5}{4}i.$

$$\left.\begin{aligned} z_J - z_K &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{3}{4} - i = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i \\ z_M - z_L &= \frac{5}{4}i - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_J - z_K = z_M - z_L$$

$\Rightarrow \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{LM}$; $KJ = |z_J - z_K| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}}$

$KJ = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $KL = |z_L - z_K| = \left|\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4} - i\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}$

$KL = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $KJ = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $KL = \frac{\sqrt{5}}{4}$; donc $KJ = KL$

$\left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) = arg\left(\frac{z_L - z_K}{z_J - z_K}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i}\right) = \arg\left(\frac{-2-i}{-1+2i}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) = \arg\left[\frac{i\,(1-2i)}{1-2i}\right] = \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\bar{u}]$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{KJ} &= \overrightarrow{LM} \\ KJ &= KL \\ \left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KL}}\right) &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{aligned}\right\} \Rightarrow JKLM \text{ est un carré.}$$

PROBLEME

PARTIE A

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

g est dérivable sur $[0, +\infty[$; $\forall x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$

$g'(x) = -\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\right]$; $\forall x \in [0, +\infty[$, $\frac{1}{(1+x)^2} > 0$ et $\frac{1}{1+x} > 0$,

donc $g'(x) < 0$. Par conséquent g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty$

b) $g(0) = 0$; $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) \in]-\infty, 0[$ $\Rightarrow g(x) < 0$

2) a) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ e^x + 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ e^x \neq -1 \end{cases}$; $x \geq 0 \Rightarrow x > -1$

$\forall x < 0$; $e^x \neq -1$ car $e^x > 0$ $et -1 < 0$.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $x \geq 0$ ou $x < 0$ $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; $Df = \mathbb{R}$

Supposons que $x < 0$

Alors $f(x) = x + \frac{2\,e^x}{e^x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Supposons que $x \geq 0$

Alors $f(x) = e^{-x}\,[1 + ln(1+x)] = e^{-x} + e^{-x}\ln(1+x)$

$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{ln(1+x)}{e^x} = \frac{1}{e^x} + \frac{ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{e^x}$

$f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{ln(1+x)}{1+x}\left(\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0\cdot$ Posons $t = 1 + x$

$x \to +\infty \Leftrightarrow t \longrightarrow +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $f(0) = e^{-0}\,[1 + ln(1+0)] = 1\,xx\,1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-x}\,[1 + ln(1+x)] = e^{-0}\,[1 + ln(1+0)] = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(x + \frac{2\,e^x}{e^x+1}\right) = 0 + \frac{2\,e^0}{e^0+1} = \frac{2}{1+1} = 1$

$\lim\limits_{x\longrightarrow0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

c) $\forall x \in]0,+\infty[$; $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-x}\,[1+ln(1+x)]-1}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-x}\,[1+ln(1+x)-\,e^x]}{x} = e^{-x}\left[\frac{ln(1+x)+1-\,e^x}{x}\right]$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{ln(1+x)}{x} + \frac{1-e^x}{x}\right] = \frac{1}{e^x}\left[\frac{ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$

d) $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1\,(1-1) = 0$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'\,(0) = 0$

$\forall x \in]-\infty, 0[$; $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+\frac{2\,e^x}{e^x+1}-1}{x} = \frac{x(e^x+1)+2e^x-\,e^x-1}{x(e^x+1)}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x(e^x+1)+\,e^x-1}{x(e^x+1)} = 1 + \frac{e^x-1}{x(e^x+1)} = 1 + \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^0+1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + 1 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'\,(0) = \frac{3}{2}$

$f_d'(0) \neq f_g'(0)$ donc f n'est pas dérivable en $0\cdot$

(Cf) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale à droite et une demi-tangente oblique de coefficient directeur $\frac{3}{2}$ à gauche.

3) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ ·

$\forall\, x \in \,]-\infty,0[,\ f'(x) = 1 + 2\left[\frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}\right]$

$f'(x) = 1 + 2\left[\frac{e^x\,(e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2}\right] = 1 + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

$\forall\, x \in \,]0,+\infty[, f'(x) = -e^{-x}\,[1 + ln(1+x)] + e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$f'(x) = e^{-x}\left[-1 - ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right] = e^{-x}\,g(x)$

4) $\forall\, x \in \,]-\infty,0[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$

$\forall\, x \in \,]0,+\infty[, e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Or $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5) $f([0,+\infty[) = \,]0,1]$

$\forall\, x \in [0,+\infty[, f(x) \in \,]0,1] \implies f(x) \neq 0$

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$, donc f est une bijection de $]-\infty,0[$ sur $f(]-\infty,0[) = \,]-\infty,1[$

Or $0 \in \,]-\infty,1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \,]-\infty,0[$ ·

$f(-0,7) = -0,7 + \frac{2e^{-0,7}}{e^{-0,7}+1} \simeq -0{,}04$

$f(-0{,}6) = -0{,}6 + \frac{2e^{-0,6}}{e^{-0,6}+1} \simeq 0{,}11$

$f(-0{,}7)\, x\, f(-0{,}6) < 0 \implies -0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

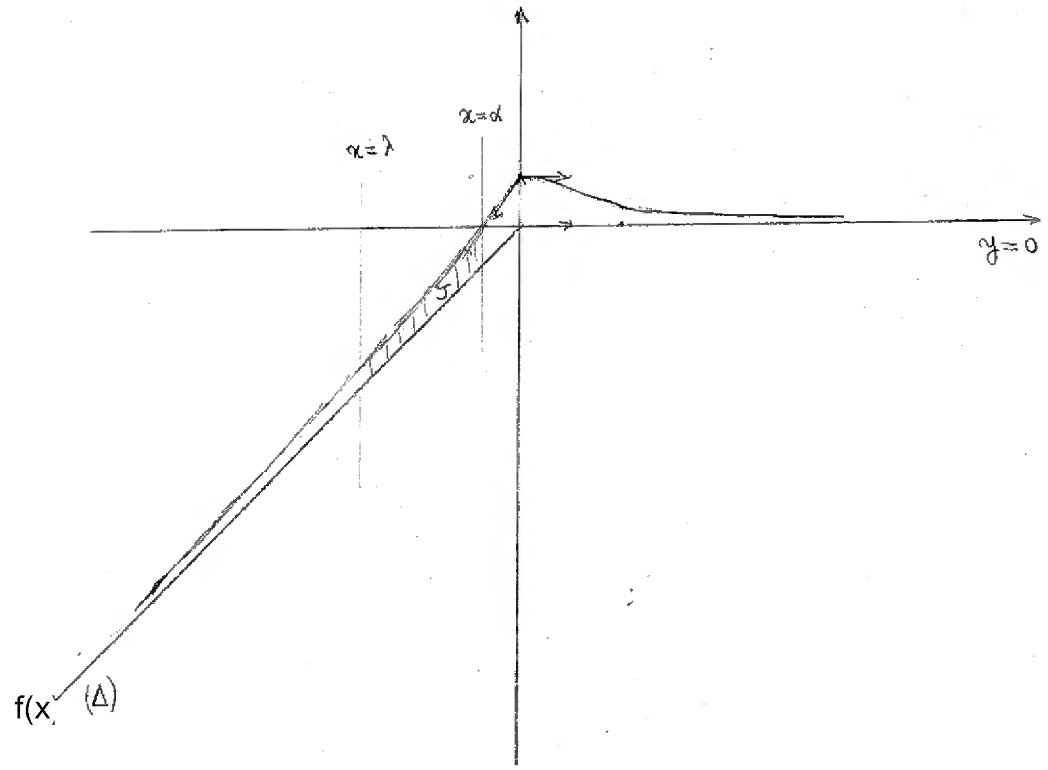
6) $\forall\, x \in \,]-\infty,0[,\ f(x) = x + \frac{2e^x}{e^x+1}$ · Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = 0$, donc la droite (Δ) d'Equation $y = x$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(Cf)\ en + \infty$ ·

7) $\forall\, x \in \,]-\infty,0[, f(x) - x = \frac{2e^x}{e^x+1}$; $2\,e^x > 0,\ e^x + 1 > 0$

$\forall\, x \in \,]-\infty,0[, f(x) - x > 0, donc\ (Cf)$ donc (Cf) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty,0[$

8)



$f(2) = e^{-2}(1 + ln\,3) \simeq 0{,}3.$

PARTIE B

1) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^\alpha [f(x) - x]\,dx = \int_\lambda^\alpha \left(x + \frac{2e^x}{e^x+1} - x\right)\,dx = \int_\lambda^\alpha \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int_\lambda^\alpha \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$

$= 2\int_\lambda^\alpha \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$

$\mathcal{A}(\lambda) = 2\int_\lambda^\alpha [ln|e^x + 1|]'\,dx = 2\int_\lambda^\alpha [ln(e^x + 1)]'\,dx$

car $|e^x + 1| = e^x + 1 \quad (e^x + 1 > 0)$

$\mathcal{A}(\lambda) = 2\,[ln(e^x + 1)]_\lambda^\alpha = 2\left[ln(e^\alpha + 1) - ln(e^\lambda + 1)\right]$

$\mathcal{A}(\lambda) = 2ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\lambda+1}\right)\,u.a$ (unité d'aire)

2) $\mathcal{A}(\lambda) = 2\,ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\lambda+1}\right)$; $\lim_{\lambda\to-\infty} e^\lambda = 0$, donc $\lim_{\lambda\to-\infty}\mathcal{A}(\lambda) = 2\,ln(e^\alpha + 1)$