UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

221MATS2A20N°1
Durée : 4 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

CORRIGÉ MATHEMATIQUES SUJET 1

EXERCICE 1 : (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrons que $a^2=-2\sqrt{3}-2i$.

$a^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=-2\sqrt{3}-2i\sqrt{1}.$

D'où $a^2=-2\sqrt{3}-2i$. **0,5 pt**

Déduisons-en le module de a.

$$|a^2|=4\Longrightarrow|a|^2=4\Longrightarrow|a|=2.$$ **0,5 pt**

2. Ecrivons a^2 sous forme trigonométrique.

$a^2=-2\sqrt{3}-2i=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=4\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$$a^2=4(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}).$$ **0,5 pt**

Vérifions qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.

$\arg(a^2)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]\Longrightarrow 2\arg(a)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]\Longrightarrow\arg(a)\equiv\frac{7\pi}{12}[\pi]$ ou $\arg(a)=\frac{7\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Prenant $k=1$, $\arg(a)=\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{19\pi}{12}$. **0,5 pt**

3. Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$a=2\left[\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right]=2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)\right]=-2\cos\frac{7\pi}{12}-2i\sin\frac{7\pi}{12}$ et

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Ce qui implique que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. **(0,25+0,25) pt**

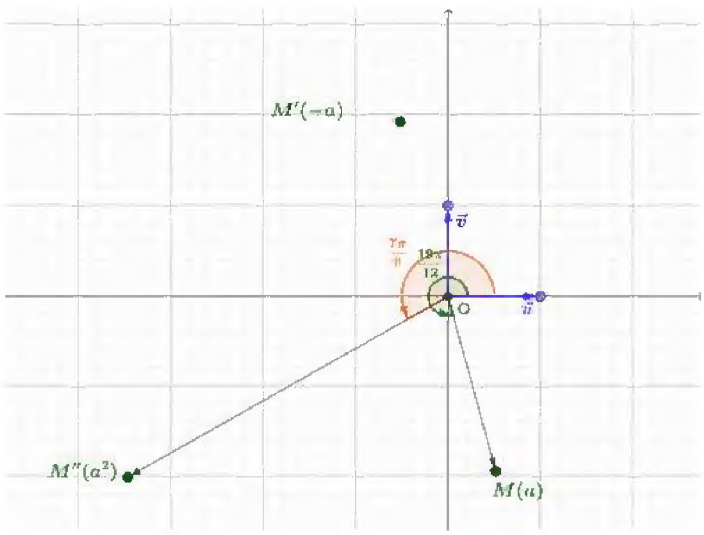
Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{6\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **(0,25+0,25) pt**

4. Représentons sur le même graphique les points images de $a, -a$ et a^2.



1 pt

EXERCICE 2 : (04 pts)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c. Puis on forme l équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Soit A l'événement : « -1 est solution de (E) avec $b = 6$ ».
   Justifions que $p(A) = \frac{5}{216}$.
   Si -1 est solution de (E) avec $b = 6$ alors a et c vérifient la relation $a + c = 6$. D'où $A = \{(1,6,5);\ (2,6,4); (3,6,3); (5,6,1); (4,6,2)\}$.
   Ce qui donne $p(A) = 5 \times \frac{1}{6^3} = \frac{5}{6^3} = \frac{5}{216}$. **0,5 pt**
2. La probabilité de l'événement :
   ✓ $\boldsymbol{B}$: " $\boldsymbol{-2}$ **est solution de** $(\boldsymbol{E})$ **et** $\boldsymbol{c = 4}$ " est $p(B) = \frac{1}{108}$.
   Justification : Si -2 est solution de (E) et $c = 4$ alors a et b vérifient la relation $4a - 2b + 4 = 0$. Ce qui implique que $b = 2a + 2$. D'où $B = \{(1,4,4);\ (2,6,4)\}$.
   Ce qui donne $p(B) = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$. **0,5 pt**
   ✓ $\boldsymbol{C}$: " **la somme des solutions est – 2 et leur produit est 1**" est $p(C) = \frac{1}{72}$.
   Justification : Si la somme des solutions est – 2 et leur produit est 1 alors a , b et c vérifient $\begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}$.
   D'où $C = \{(1,2,1);\ (2,4,2);\ (3,6,3)\}$.
   Ce qui donne $p(C) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$. **0,5 pt**
   ✓ $\boldsymbol{D}$: " **Les deux solutions sont confondues avec** $\boldsymbol{b = 4}$ " est $p(D) = \frac{1}{72}$.
   Justification : Si les deux solutions sont confondues avec $b = 4$ alors a , b et c vérifient $\begin{cases} b^2 = 4ac \\ b = 4 \end{cases}$.
   Ce qui implique que a et c vérifient la relation $a \times c = 4$.
   D'où $D = \{(1,4,4);\ (2,4,2);\ (4,4,1)\}$.
   Ce qui donne $p(D) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$. **0,5 pt**
3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.
   a) Soit F l'événement : " l'événement A se réalise une seule fois au 3ème essai".
   Montrons que $p(F) = \frac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}$.
   Désignons par S « l'événement A se réalise » et par E « l'événement A ne se réalise pas».
   D'où F est le $10 - uplets$ défini comme suit : $F = (E, E, S, E, E, E, E, E, E, E)$. Donc
   $p(F) = C_1^1 \times \frac{5}{216} \times \left(\frac{211}{216}\right)^9$. **0,5 pt**
   b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.
   b-1) La loi de probabilité de Y:
   $$Y = \{0, 1 ,2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8 ,9, 10\}$$
   $$p(Y = k) = C_{10}^k \times \left(\frac{5}{216}\right)^k \times \left(\frac{211}{216}\right)^{10-k}.$$ **0,5 pt**

Ici Y suit une loi binomiale $B(n, p)$ de probabilité p ; $n = 10$.

b-2) Le nombre espéré de réalisations de$A$ est : $E(Y) = n \times p(A) = 10 \times \frac{5}{216} = \frac{25}{108}$. **0,5 pt**

b-3) La variance de Y est : $V(Y) = n \times p(A)(1 - p(A)) = 10 \times \frac{5}{216} \times \frac{211}{216} = \frac{10550}{(216)^2}$. **0,5 pt**

PROBLEME : (12 pts)

A.

1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 0 < x < 1\ \ ou\, x \geq 1 \Leftrightarrow x \in\ ]0, +\infty[$ **0,5 pt**

   $Df =\ ]0, +\infty[$.

2. $f(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 + 1 = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 + x - x\ln x = 1 + 1 - 1\ln 1 = 2$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$; d'où f est continue en 1.

0,5 pt

3. supposons que $0 < x < 1$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+x-x\ln x-2}{x-1} = \frac{x-1-x\ln x}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$ or $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$, d'où

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - 1\,(1) = 1 - 1 = 0.$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$. **0,25 pt**

Supposons que $x > 1$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-2}{x-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x-1)} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}.$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}$. D'où $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{1}\left(\sqrt{1}+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$;

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$. **0,25 pt**

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$; donc f n'est pas dérivable en 1. **0,25 pt**

$f'_g(1) = 0$; donc (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente horizontale à gauche. **0,25 pt**

$f'_d(1) = -\frac{1}{2}$; donc (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente oblique de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ à droite. **0,25 pt**

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x = 1 + 0 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. **0,25 pt**

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$. **0,25 pt**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. **0,25 pt**

5. $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$; donc f admet un prolongement par continuité à droite en 0.

$\begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

0,5 pt

6. Supposons que $0 < x < 1$.

$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1+x-x\ln x-1}{x} = \frac{x-x\ln x}{x} = \frac{x(1-\ln x)}{x} = 1 - \ln x.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \ln x = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = +\infty$; donc h n'est pas dérivable à droite en 0. **0,25 pt**

La courbe de h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale à droite. **0,25 pt**

7. $\forall x \in \,]0,1[$, $f'(x) = 1 - \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$ **0,5 pt**

$\forall x \in \,]1,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\,x\sqrt{x}}$. **0,5 pt**

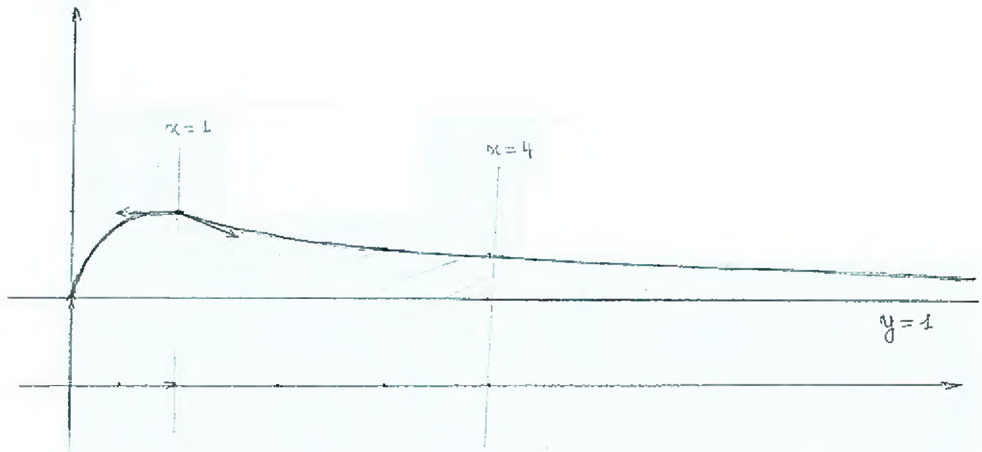
$\forall x \in \,]0,1[$, $\ln x < 0 \Rightarrow -\ln x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$

$\forall x \in \,]1,+\infty[$, $x\sqrt{x} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$

1 pt

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

7) a)



$f(2) \simeq 1{,}71$; $f(3) \simeq 1{,}58$; $f(4) = 1{,}5$; $f(0{,}5) \simeq 1{,}85$ **1 pt**

b. $A = \int_1^4 [f(x) - 1]\, dx \times \mathcal{U}.a$, avec $\mathcal{U}.a =$ unité d'aire.

On a : $\int_1^4 [f(x) - 1]\, dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2.$

Or $1\, \mathcal{U}.a = 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$.

Donc $A = 2 \times 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$. **1 pt**

B. 1. $g = f$ sur $[1, +\infty[$.

a. $g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0 \Leftrightarrow k(x) = 0$, avec $k(x) = g(x) - x$.

k est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$\forall\, x \in\,]1, +\infty[, k'(x) = g'(x) - 1 = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1.$ **0,25 pt**

$\forall\, x \in\,]1, +\infty[, k'(x) < 0$, donc k est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. **0,25 pt**

Donc k est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $k([1, +\infty[) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} k(x),\ k(1) \right] =]-\infty, 1]$. **0,25 pt**

Or $0 \in\,]-\infty, 1]$, donc l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. En conséquence l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. **0,25 pt**

$k(1) = 1$; $k(2) = g(2) - 2 = f(2) - 2 \simeq 1{,}71 - 2 \simeq -0{,}29$.

$k(1) \times k(2) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 2$.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$k(x)$	1					0,32	0,19	0,06	-0,05	-0.37	-0,29

$k(1{,}5) = f(1{,}5) - 1{,}5 \simeq 0{,}32$; $k(1{,}6) = f(1{,}6) - 1{,}6 \simeq 0{,}19$;

$k(1{,}7) = f(1{,}7) - 1{,}7 \simeq 0{,}06$; $k(1{,}8) = f(1{,}8) - 1{,}8 \simeq -0{,}05$.

$k(1{,}7) \times k(1{,}8) < 0 \Rightarrow 1{,}7 < \alpha < 1{,}8$. **0,25 pt**

b. $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow |g'(x)| = \left|-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$

$x \in [1, +\infty[\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x\sqrt{x} \geq x$

$\Rightarrow x\sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow 2\, x\sqrt{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2\, x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$ **0,5 pt**

c. g est dérivable sur $[1, +\infty[$

$\forall\, t \in [1, +\infty[,\ |g'(t)| \leq \frac{1}{2}$. Or $\alpha \in [1, +\infty[$; donc $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Longrightarrow \; |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$. **0,25 pt**

2. a. $w_0 = 2$. Or $2 \geq 1$; donc $w_0 \geq 1$.

Supposons que $w_n \geq 1, n \geq 0$ et montrons que $w_{n+1} \geq 1$.

$w_n \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{w_n}} > 0 \;\Longrightarrow\; 1+\frac{1}{\sqrt{w_n}} > 1 \;\Longrightarrow\; w_{n+1} > 1 \Longrightarrow\; w_{n+1} \geq 1$.

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N},\; w_n \geq 1$. **0,75 pt**

b. $\forall\, x \in [1,+\infty[\,,\; |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

Or d'après la question précédente, $w_n \geq 1$. Ce qui implique que $w_n \in [1,+\infty[$.

$w_n \in [1,+\infty[\; \Longrightarrow |g(w_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}\,|w_n-\alpha| \Longrightarrow |w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\,|w_n-\alpha|$. **0,25 pt**

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |w_0-\alpha| = |w_0-\alpha|$. Or $|w_0-\alpha| \leq |w_0-\alpha|$, donc $|w_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |w_0-\alpha|$.

Supposons que $|w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|, n \geq 0$ et montrons que $|w_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |w_0-\alpha|$.

$|w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|w_n-\alpha|$. Or $|w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|$, donc $|w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|$

$\Longrightarrow \; |w_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |w_0-\alpha|$.

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|$. **0,75 pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}|w_n-\alpha|=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} w_n=\alpha$. **0,25 pt**

Une autre correction

https://www.ilemaths.net

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit le nombre complexe a défini par $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Nous devons d'abord montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= 2-\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - 2 - \sqrt{3} \\
&= -2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\sqrt{4-3} \\
&= -2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\sqrt{1} \\
&= -2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a^2 = -2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}}$$

Nous devons ensuite en déduire le module de a.

$$a^2 = -2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} |a^2| &= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{12+4} \\ &= \sqrt{16} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } |a^2| = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad |a|^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{|a| = 2}$$

2. Écrivons d'abord a^2 sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned}
a^2 &= -2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i} \\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \\
&= 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a^2 = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$$

Vérifions ensuite qu'une des mesures de l'argument de a est $\dfrac{19\pi}{12}$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\arg(a^2) \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \quad &\Longrightarrow \quad 2\arg(a) \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \\
&\Longrightarrow \quad \arg(a) \equiv -\frac{5\pi}{12}\ [\pi] \\
&\Longrightarrow \quad \arg(a) = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Si $k = 2$, alors $\arg(a) = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi = -\frac{5\pi}{12} + \frac{24\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$.

$\Longrightarrow$ Si $k = 2$, alors $\boxed{\arg(a) = \frac{19\pi}{12}}$

Par conséquent, **une des mesures de l'argument de** a **est** $\frac{19\pi}{12}$.

3. Nous devons en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Nous savons que $|a| = 2$ et qu'une mesure de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.
Dès lors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
a &= 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \text{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right) \\
&= 2\left[\cos\left(\pi + \frac{7\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(\pi + \frac{7\pi}{12}\right)\right] \\
&= 2\left(-\cos\frac{7\pi}{12} - \text{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = -2\cos\frac{7\pi}{12} - 2\text{i}\sin\frac{7\pi}{12}}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} a = -2\cos\frac{7\pi}{12} - 2\,\text{i}\sin\frac{7\pi}{12} \\ a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \text{i}\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2\cos\frac{7\pi}{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sin\frac{7\pi}{12} = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$. \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}}$$

Nous devons également en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{6\pi}{12}\right) \\
&= \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{2}\right) \quad \text{car } \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\
&= \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \quad \text{car } \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha) \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}
\end{aligned}$$

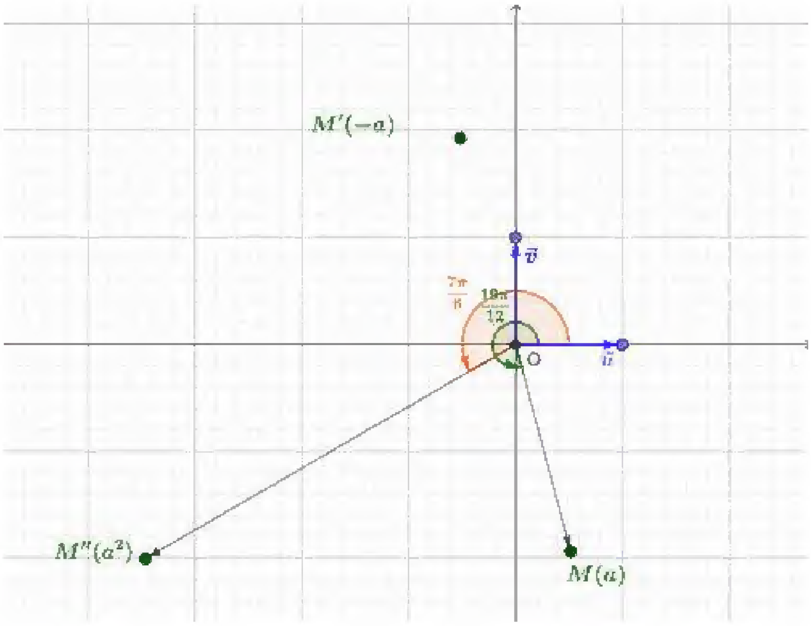
$$\Longrightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{6\pi}{12}\right) \\
&= \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{2}\right) \quad \text{car } \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\
&= -\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) \quad \text{car } \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

4. Graphique représentant les points images de a , $-a$ et a^2.



Exercice 2 (4 points)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6.

On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c.

Puis on forme l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire.

1. Soit A l'événement : "-1 est solution de (E) et $b = 6$".

Si -1 est solution de (E), alors nous pouvons remplacer x par -1 dans l'équation (E).
De plus $b = 6$.
Dès lors, nous obtenons : $a \times (-1)^2 + 6 \times (-1) + c = 0$, soit $a - 6 + c = 0$.
D'où $\boxed{a + c = 6}$.
Les couples $(a\,;\,c)$ vérifiant la relation $a + c = 6$ sont les couples $(1\,;\,5)$, $(2\,;\,4)$, $(3\,;\,3)$, $(4\,;\,2)$, $(5\,;\,1)$.
Il s'ensuit que $A = \{(1\,;6\,,\,5),\,(2\,;6\,,\,4),\,(3\,;6\,,\,3),\,(4\,;6\,,\,2),\,(5\,;6\,,\,1)\}$.
Nous associons à l'expérience aléatoire l'univers des possibles $\Omega = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}^3$, muni de l'équiprobabilité.

Donc la probabilité de l'événement A est égale à $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{5}{6^3} = \dfrac{5}{216}$

Par conséquent, $\boxed{p(A) = \dfrac{5}{216}}$.

2. Soit l'événement B : "-2 est solution de (E) et $c = 4$".
Nous devons déterminer $p(B)$.

Si -2 est solution de (E), alors nous pouvons remplacer x par -2 dans l'équation (E).
De plus $c = 4$.
Dès lors, nous obtenons : $a \times (-2)^2 + b \times (-2) + 4 = 0$, soit $4a - 2b + 4 = 0$, soit $2a - b + 2 = 0$.

D'où $\boxed{b = 2a + 2}$.
Les couples $(a\,;b)$ vérifiant la relation $b = 2a + 2$ sont les couples $(1\,;\,4)$, $(2\,;\,6)$.
Il s'ensuit que $B = \{(1\,;4\,,\,4),\,(2\,;6\,,\,4)\}$.
Donc la probabilité de l'événement B est égale à $p(B) = \dfrac{2}{6^3} = \dfrac{2}{216} = \dfrac{1}{108}$

Par conséquent, $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{108}}$.

Soit l'événement C : "la somme des solutions est -2 et leur produit est 1".
Nous devons déterminer $p(C)$.

La somme des solutions de l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ est donnée par la formule $-\dfrac{b}{a}$ et le produit de ces solutions est donné par la formule $\dfrac{c}{a}$.

Dès lors, nous obtenons : $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = -2 \\ \dfrac{c}{a} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}$

Il s'ensuit que $C = \{(1\,;2\,,\,1),\,(2\,;4\,,\,2),\,(3\,;6\,,\,3)\}$.
Donc la probabilité de l'événement C est égale à $p(C) = \dfrac{3}{6^3} = \dfrac{3}{216} = \dfrac{1}{72}$

Par conséquent, $\boxed{p(C) = \dfrac{1}{72}}$.

Soit l'événement D : "les deux solutions sont confondues et $b = 4$".
Nous devons déterminer $p(D)$.

Si les deux solutions sont confondues, alors le discriminant de l'équation (E) est nul, soit $b^2 - 4ac = 0$.
Or $b = 4$.
Donc nous obtenons : $16 - 4ac = 0$; soit $4ac = 16$, soit $ac = 4$.
Les couples $(a\,;c)$ vérifiant la relation $ac = 4$ sont les couples $(1\,;\,4)$, $(2\,;\,2)$, $(4\,;\,1)$.
Il s'ensuit que $D = \{(1\,;4\,,\,4),\,(2\,;4\,,\,2),\,(4\,;4\,,\,1)\}$.
Donc la probabilité de l'événement D est égale à $p(C) = \dfrac{3}{6^3} = \dfrac{3}{216} = \dfrac{1}{72}$

Par conséquent, $\boxed{p(D) = \dfrac{1}{72}}$.

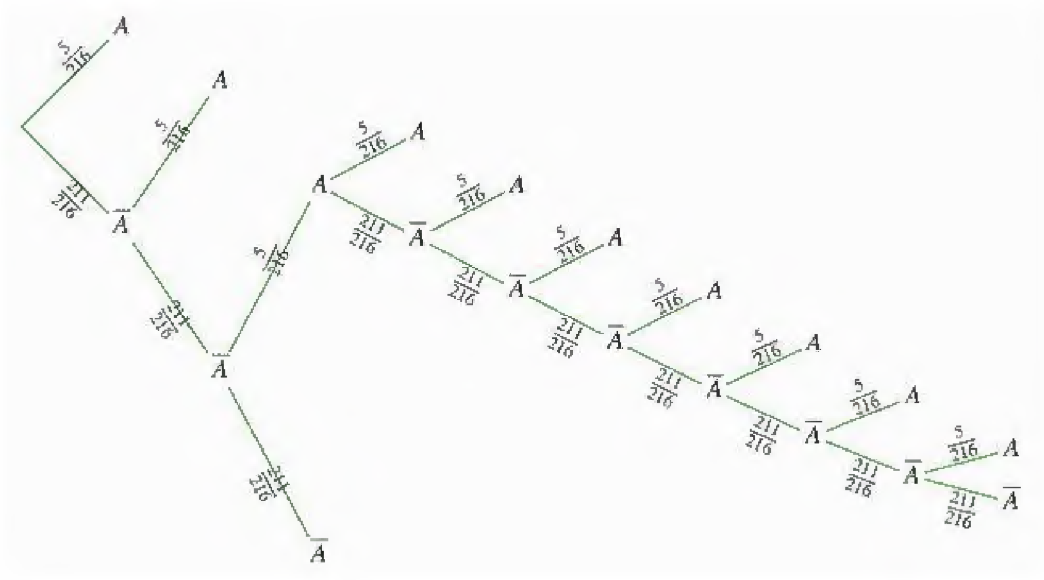
3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.

3. a) Soit F l'événement : "L'événement A se réalise une seule fois au 3e essai".
Nous devons montrer que la probabilité de l'évènement F est $p(F) = \dfrac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}$.

Nous avons montré que $p(A) = \dfrac{5}{216}$.

Si nous notons $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A, alors $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{5}{216} \implies \boxed{p(\overline{A}) = \dfrac{211}{216}}$

Ci-dessous un arbre pondéré représentant la situation de l'événement F .



D'où $p(F) = \left(\dfrac{211}{216}\right)^2 \times \dfrac{5}{216} \times \left(\dfrac{211}{216}\right)^7 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p(F) = \dfrac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}}$

3\. b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.

3\. b-1) Lors de cette expérience, on répète 10 fois des épreuves identiques et indépendantes.
Chaque épreuve comporte deux issues :

- Succès : "L'événement A est réalisé" dont la probabilité est $p = \dfrac{5}{216}$;
- Echec : "L'événement A n'est pas réalisé" dont la probabilité est $1 - p = 1 - \dfrac{5}{216} = \dfrac{211}{216}$.

La variable aléatoire Y compte le nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves, soit le nombre de succès à la fin de la répétition des épreuves.

D'où la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,\dfrac{5}{216})$.

Dès lors, la loi de probabilité de Y est donnée par :

$$\boxed{p(Y = k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{5}{216}\right)^k \times \left(\frac{211}{216}\right)^{10-k} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{N},\ k \leqslant 10}$$

3\. b-2) Le nombre espéré de réalisations de A est donné par l'espérance mathématique de Y .

$$\begin{aligned} E(Y) &= n \times p(A) \\ &= 10 \times \frac{5}{216} \\ &= \frac{50}{216} \\ &= \frac{25}{108} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{E(Y) = \dfrac{25}{108}}$

Donc **le nombre espéré de réalisations de A est égal à $\dfrac{25}{108}$.**

3\. b-3) Nous devons calculer la variance de Y .

$$V(Y) = n \times p(A) \times \Big(1 - p(A)\Big)$$

$$= 10 \times \frac{5}{216} \times \frac{211}{216}$$
$$= \frac{10\,550}{46\,656}$$
$$= \frac{5\,275}{23\,328}$$
$$\Longrightarrow \boxed{V(Y) = \frac{5\,275}{23\,328}}$$

Problème (12 points)

Partie A

Soient la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x - x\ln(x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Déterminons l'ensemble de définition D_f de f .

Pour tout réel $x \in \,]0\,;\,1[$, $f(x)$ existe car $\ln(x)$ existe si $x > 0$ et cette condition est réalisée sur $]0\,;\,1[$.

Pour tout réel $x \in [1\,;\,+\infty[$, $f(x)$ existe car $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ existe si $x > 0$ et cette condition est réalisée sur $[1\,;\,+\infty[$.

D'où $f(x)$ existe pour tout réel $x \in \,]0\,;\,1[\,\cup\,[1\,;\,+\infty[$, soit pour tout réel $x \in \,]0\,;\,+\infty[$.

Par conséquent, **l'ensemble de définition de f est** $\boxed{D_f = \,]0\,;\,+\infty[}$.

2. Nous devons étudier la continuité de f en 1.

- Calculons d'abord $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left[1 + x - x\ln(x)\right]$$
$$= 1 + 1 - 1 \times \ln(1)$$
$$= 2$$
$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2}$$

Calculons ensuite $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{1}}$$
$$= 2$$
$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2}$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2}$.

- De plus, nous savons que $f(1) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(1) = 2}$.

Dès lors $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)}$.

Par conséquent, **la fonction f est continue en 1.**

3. Nous devons étudier la dérivabilité de f en 1.

Nous devons donc montrer que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe et est un nombre réel.

<u>Premier cas : $0 < x < 1$</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\Big(1+x-x\ln(x)\Big)-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1-x\ln(x)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{x\ln(x)}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \left(1 - \frac{x\ln(x)}{x-1}\right) \\
&= 1 - \lim_{x\to 1^-} \left(x \times \frac{\ln(x)}{x-1}\right)
\end{aligned}$$

D'une part, $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$.

D'autre part, si g est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\ln(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \\
&= g'(1) \\
&= 1 \quad \text{car } g'(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad g'(1) = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

D'où $\begin{aligned}[t] \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= 1 - \lim_{x\to 1^-} \left(x \times \frac{\ln(x)}{x-1}\right) \\ &= 1 - 1\times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0}$$

Par conséquent, **la fonction f est dérivable à gauche en 1 et** $\boxed{f'_g(1) = 0}$.

<u>Deuxième cas : $x > 1$</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{1}+1)\sqrt{1}}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}}$$

Par conséquent, **la fonction f est dérivable à droite en 1 et** $\boxed{f'_d(1) = -\frac{1}{2}}$.

Nous en déduisons que **la fonction f n'est pas dérivable en 1** car $f'_g(1) \neq f'_d(1)$.

La courbe représentative (C_f) admet donc une demi-tangente horizontale à gauche en 1 et une demi-tangente à droite en 1 de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

4. Nous devons déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

- Calculons d'abord $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} [1+x-x\ln(x)]$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x\to0^+} x = 0 \\ \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{(croissances comparées)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to0^+} \Big[1+x-x\ln(x)\Big] = 1+0-0 = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = 1}$$

D'où **le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ est un point d'arrêt de la courbe (C_f).**

- Calculons ensuite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1+0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

D'où **la droite d'équation : $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.**

5. Nous devons montrer que f admet un prolongement par continuité h à droite en 0.

Puisque $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$ et que 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f, nous en déduisons qu'il existe un prolongement par continuité h à droite en 0 défini par : $\boxed{h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ f(x) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}}$

6. Nous devons étudier la dérivabilité de h à droite de 0.

Nous devons donc déterminer si $\lim_{x\to0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ existe et est un nombre réel.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\Big(1+x-x\ln(x)\Big)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-x\ln(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\Big(1-\ln(x)\Big)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\Big(1-\ln(x)\Big)\end{aligned}$$

$$\text{Or}\quad \lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0^+}\Big(-\ln(x)\Big)=+\infty$$
$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0^+}\Big(1-\ln(x)\Big)=+\infty$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=+\infty}$

Puisque $\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=+\infty\notin\mathbb{R}$, nous en déduisons que **la fonction h n'est pas dérivable à droite de 0.**

La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale au point de coordonnées (0 ; 1).

7. Déterminons les expressions de $f'(x)$ dans chacun des intervalles $]0\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

- Pour tout $x\in\,]0\,;\,1[$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \Big(1+x-x\ln(x)\Big)'\\ &= 0+1-\left(x'\times\ln(x)+x\times\Big(\ln(x)\Big)'\right)\\ &= 1-\left(1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)\\ &= 1-\Big(\ln(x)+1\Big)\\ &= 1-\ln(x)-1\\ &= -\ln(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } x\in\,]0\,;\,1[,\quad f'(x)=-\ln(x)}$.

- Pour tout $x\in\,]1\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\\ &= 0-\frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}\\ &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\\ &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } x\in\,]1\,;\,+\infty[,\quad f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$.

Nous devons ensuite dresser le tableau de variations de f .

Etudions le signe de la dérivée sur chacun des intervalles $]0\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

pour tout $x\in\,]0\,;\,1[,\quad \ln(x)<0 \quad\Longrightarrow\quad -\ln(x)>0$

$$\implies \quad f'(x) > 0$$

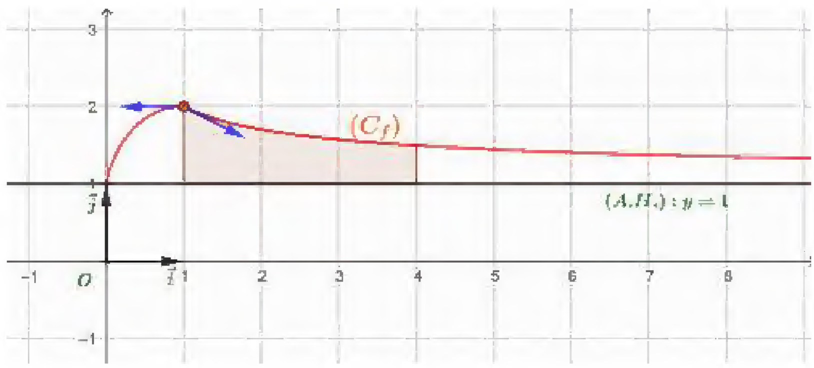
pour tout $x \in]1\,;+\infty[, \quad x\sqrt{x} > 0 \quad \implies \quad -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$

$$\implies \quad f'(x) < 0$$

Nous pouvons dresser le tableau de variations de f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$	$+$	$\vert\vert$	$-$	
$f(x)$	$\vert\vert 1$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

8. a) Traçons (C_f).



8. b) Nous devons calculer l'aire A en cm² de la partie du plan comprise entre (C_f), la droite d'équation $y = 1$, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = 4$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4 \Big(f(x) - 1\Big)\, dx \\
&= \int_1^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx \\
&= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= 2 \times \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\
&= 2 \times \Big[\sqrt{x}\Big]_1^4 \\
&= 2 \times \left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) \\
&= 2 \times (2 - 1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\implies \quad \boxed{A = 2 \text{ u.a.}}$$

Or l'unité de longueur du repère mesure 2 cm.
Donc l'unité d'aire (u.a.) mesure 4 cm².
Par conséquent, **l'aire A est égale à 2 × 4 cm² = 8 cm² .**

Partie B

1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

1. a) Soit la fonction k définie sur $[1\,;+\infty[$ par $k(x)=g(x)-x$.

Résoudre l'équation $g(x)=x$ revient à résoudre l'équation $k(x)=0$.

La fonction k est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables sur $]1\,;+\infty[$).
Donc la fonction k est continue sur $]1\,;+\infty[$.

Pour tout x appartenant à $]1\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}k'(x)&=g'(x)-1\\&=f'(x)-1\\&=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-1\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{k'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-1<0}$$

Nous en déduisons que la fonction k est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

De plus,

$$\begin{aligned}k(1)&=g(1)-1\\&=f(1)-1\\&=2-1\\&=1\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{k(1)=1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}k(x)&=\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]\\&=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]\end{aligned}$$

$$\text{Or }\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-\infty$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}k(x)=-\infty}$$

Nous en déduisons que $k\Big([1\,;+\infty[\Big)=]-\infty\,;1]$.
Donc la fonction k est une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;1]$.

Or $0\in]-\infty\,;1]$.
D'où l'équation $k(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1\,;+\infty[$.
Par conséquent, **l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α dans $[1\,;+\infty[$.**

$$\text{En outre, }\begin{cases}k(1)=1>0\\ k(2)=g(2)-2=f(2)-2=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\approx-0,29<0\end{cases}$$

Dès lors, $\boxed{1<\alpha<2}$.

Nous devons en déduire un encadrement de α à 10^{-1} près.

A l'aide de la calculatrice, nous obtenons : $\begin{cases} k(1,7) \approx 0,07 > 0 \\ k(1,8) \approx -0,05 < 0 \end{cases}$

Par conséquent, $\boxed{1,7 < \alpha < 1,8}$.

1\. b) Nous devons montrer que : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [1\,;+\infty[,\ g'(x) = f'(x) \quad &\Longrightarrow \quad g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &\Longrightarrow \quad |g'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } x \in [1\,;+\infty[\quad &\Longrightarrow \quad x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad x\sqrt{x} \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad 2x\sqrt{x} \geqslant 2 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall x \in [1\,;+\infty[,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}}$

1\. c) Nous devons en déduire que : $\forall x \in [1\,;+\infty[, |g(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

La fonction g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$.
Par la question précédente, nous savons que $\forall t \in [1\,;+\infty[,\ |g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
Selon l'inégalité des accroissements finis, nous en déduisons que $\forall x \in [1\,;+\infty[, |g(x) - g(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.
Or $g(\alpha) = \alpha$ car α est solution de l'équation $g(x) = x$.

Par conséquent, $\boxed{\forall x \in [1\,;+\infty[, |g(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|}$.

2\. Soit (W_n) la suite définie par : $\begin{cases} W_0 & = & 2 \\ W_{n+1} & = & 1 + \dfrac{1}{\sqrt{W_n}} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$

2\. a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ W_n \geqslant 1$.

__Initialisation__ : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $W_0 \geqslant 1$.

C'est une évidence car $W_0 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W_0 \geqslant 1}$.
Donc l'initialisation est vraie.

__Hérédité__ : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.
Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $W_n \geqslant 1$, alors $W_{n+1} \geqslant 1$.
En effet,

$$\begin{aligned} W_n \geqslant 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{W_n} \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{W_n}} \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{W_n}} \leqslant 2 \\ &\Longrightarrow \quad 1 < W_{n+1} \leqslant 2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{W_{n+1} \geqslant 1}$.
L'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ W_n \geqslant 1$.**

2. b) Nous devons démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|W_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|W_n - \alpha|$.

Nous avons montré que $\forall x \in [1\,;+\infty[, |g(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \geqslant 1$, soit que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \in [1\,,+\infty[$.

Dès lors, en remplaçant x par W_n, nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N},\ |g(W_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|W_n - \alpha|$.

Or, par définition de la fonction g, nous savons que : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \geqslant 1$.

Etant donné que $W_n \geqslant 1$, nous en déduisons que $g(W_n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{W_n}} \implies g(W_n) = W_{n+1}$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ |g(W_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|W_n - \alpha| \iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |W_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|W_n - \alpha|}$

2. c) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|W_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $|W_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 |W_0 - \alpha|$.
C'est une évidence.

En effet, $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \implies |W_0 - \alpha| \leqslant 1 \times |W_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times |W_0 - \alpha|$

$$\implies \boxed{|W_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 |W_0 - \alpha|}$$

Donc l'initialisation est vraie.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.

Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $|W_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$,

alors $|W_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |W_0 - \alpha|$.
En effet, pour tout nombre naturel n

$|W_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|W_n - \alpha|$ voir question 2. b)

$\Downarrow$

$|W_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$ car $|W_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$

$\Downarrow$

$$\boxed{|W_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |W_0 - \alpha|}$$

L'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que, pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|W_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|}$.

Nous en déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha| = 0$$
$$\implies \lim_{n\to+\infty} |W_n - \alpha| = 0$$
$$\implies \lim_{n\to+\infty} (W_n - \alpha) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} (W_n) - \alpha = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = \alpha}$$