Epreuve du 1er groupe

Grille de correction des copies des élèves

Pour la correction des copies, il faudra tenir compte, pour chaque réponse à une question de l'épreuve de :

- ✓ ***La justesse du raisonnement pour 50% de la note. Si le raisonnement est acceptable mais insuffisant, on donne 25% de la note.***
- ✓ ***L'exactitude des résultats attendus et qui sont en adéquation avec le raisonnement pour 50% de la note.***

CORRIGE

EXERCICE 1

1) Le nombre rationnel strictement positif a et l'entier naturel n sont des données inutiles. Pour le calcul de limite, on a **d'après les limites usuelles** :
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. **(0,75+0,75 pt)**
2) Une primitive de la fonction :
a) $(\boldsymbol{exp \circ f})\boldsymbol{f'}$.
   On sait que la dérivée de la composée $exp \circ f$ est la fonction $(exp \circ f)f'$. Donc une primitive de la fonction $x \mapsto (exp \circ f(x))f'(x)$ est la fonction $x \mapsto exp \circ f(x) + c$, avec c une constante. **(0,75 pt)**
b) $\frac{f'}{f}$.
   On sait que si $f$est non nulle alors la dérivée de la composée $\ln(|f|)$ est la fonction $\frac{f'}{f}$.
   Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ si $f$est non nulle, est la fonction $x \mapsto \ln(|f(x)| + k$ avec $f(x) \neq 0$ et k une constante. **(0,75 pt)**

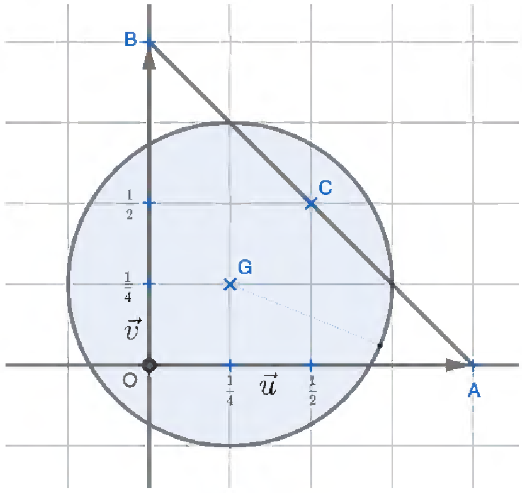
EXERCICE 2

1) $p(1) = 2(1)^3 - 3(1+i)\,(1)^2 + 4i\,(1) + 1 - i$.
   $P(1) = 2 - 3 - 3i + 4i + 1 - i = 0$, donc 1 est une racine de P. **(0,25 pt)**
   $P(i) = 2i^3 - 3(1+i)\,i^2 + 4i\,(i) + 1 - i = -2i + 3(1+i) - 4 + 1 - i$
   $P(i) = -2i + 3 + 3i - 4 + 1 - i = 0$, donc i est une racine de P. **(0,25 pt)**
2) *L'élève pourra déterminer $g(z)$ par division euclidienne, par la méthode d'identification des coefficients ou par la méthode de Hörner.*
   Utilisons dans ce tableau deux fois la méthode de Hörner

	2	$-3-3i$	$4i$	$1-i$
1		2	$-1-3i$	$-1+i$
	2	$-1-3i$	$-1+i$	0
i		$2i$	$-i+1$	
	2	$-1-i$	0	

   D'où $g(z) = 2z - 1 - i$ et $P(z) = (z-1)\,(z-i)\,(2z-1-i)$. **(0,5 pt)**
3) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ sont $1, i$ et la racine de g.
   $g(z) = 0 \Leftrightarrow 2z - 1 - i = 0 \Leftrightarrow 2z = 1 + i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$.
   $S = \left\{1, i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\right\}$. **(0,5 pt)**

4) a)



b) *L'élève pourra démontrer que C est le milieu de $[AB]$ en utilisant les affixes respectives des points A, B et C ou en utilisant leurs coordonnées respectives.*

En utilisant les affixes respectives des points A, B et C on a $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = z_C$ donc C est le milieu de $[AB]$. **(0,25 pt)**

Démontrons que C appartient à l'ensemble (E).

On a $\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{CO}\| = \|2\,\overrightarrow{CO}\| = 2|z_C| = \sqrt{2}$. Ce qui implique que $\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{CO}\| \leq 2$.

D'où C appartient à l'ensemble (E). **(0,25 pt)**

c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, 1)\ ;\ (B, 1)\ ;\ (O, 2)\}$.

On a : $z_G = \frac{z_A + z_B + 2z_O}{1+1+2} = \frac{1+i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ i.$ **(0,25 pt)**

Voir figure pour le placement du point G dans le repère. **(0,25 pt)**

5) Comme G est le barycentre de $\{(A, 1)\ ;\ (B, 1)\ ;\ (O, 2)\}$, donc pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO} = (1+1+2)\,\overrightarrow{MG} \implies \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO} = 4\,\overrightarrow{MG}.$$

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\| \leq 2 \iff \|4\,\overrightarrow{MG}\| \leq 2 \iff 4\|\overrightarrow{MG}\| \leq 2 \iff MG \leq \frac{1}{2} \iff M$ appartient au disque de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$. D'où (E) est le disque de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$. **(0,25 pt)**

Pour la construction de (E) voir figure. **(0,25 pt)**

6) Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point C milieu de $[AB]$, d'affixe $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i$. **(0,25 pt)**

Les élèves pourront donner d'autres réponses possibles. A savoir :

- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point C milieu de [AB], d'affixe $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i$.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point B.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i$ et $z_B = 1$). Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point A.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point B.

✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$ et $z_B = i$). Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point A.

EXERCICE 3

1) Déterminons U_1 et U_2

$U_1 = \frac{1}{U_0} + \frac{3}{4}\, U_0 = \frac{1}{6} + \frac{3}{4}\,(6) = \frac{1}{6} + \frac{9}{2} = \frac{1}{6} + \frac{27}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$ **(0,25 pt)**

$U_2 = \frac{1}{U_1} + \frac{3}{4}\, U_1 = \frac{1}{\frac{14}{3}} + \frac{3}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{3}{14} + \frac{7}{2} = \frac{3}{14} + \frac{49}{14} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7}.$ **(0,25 pt)**

2) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ U_n \geq \sqrt{3}.$

- Vérifions que $U_0 \geq \sqrt{3}.$

On a $U_0 = 6$. Or $6 \geq \sqrt{3}$, donc $U_0 \geq \sqrt{3}.$

- Démontrons que si $U_n \geq \sqrt{3}$ alors $U_{n+1} \geq \sqrt{3}.$

Supposons que $U_n \geq \sqrt{3}$ et montrons que $U_{n+1} \geq \sqrt{3}.$

$U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}\, U_n - \sqrt{3} = \frac{4 + 3\, U_n^2 - 4\sqrt{3}\, U_n}{4\, U_n}.$

$U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3\, U_n^2 - 4\sqrt{3}\, U_n + 4}{4\, U_n} = \frac{(\sqrt{3}\, U_n - 2)^2}{4\, U_n}.$

Or $U_n \geq \sqrt{3}$ implique que $(\sqrt{3}\, U_n - 2)^2 \geq 0$ et $U_n > 0$.

Ce qui donne $\frac{(\sqrt{3}\, U_n - 2)^2}{4\, U_n} \geq 0 \implies U_{n+1} - \sqrt{3} \geq 0 \implies U_{n+1} \geq \sqrt{3}.$

- Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}.$ **(01 pt)**

3) a) f est une fonction rationnelle, donc f est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Par conséquent f est dérivable sur $]0, +\infty[$. **(0,25 pt)**

$\forall\, x \in\ ]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{4} = \frac{-4 + 3x^2}{4\, x^2} = \frac{3\, x^2 - 4}{4\, x^2}.$

$f'(x) = \frac{(\sqrt{3}\, x + 2)(\sqrt{3}\, x - 2)}{4\, x^2}.$ **(0,25 pt)**

$\forall x \in\ ]0, +\infty[, \sqrt{3}x + 2 > 0$ et $4\, x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{3}x - 2$.

$\sqrt{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$

(0,25 pt)

f est strictement croissante sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. **(0,25 pt)**

b) Déduisons-en par récurrence que $(U_n)_{n\, \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- Vérifions que $U_1 < U_0$.

$U_0 = 6\ et\ U_1 = \frac{14}{3}$. Or $\frac{14}{3} < 6$, donc $U_1 < U_0$.

- Supposons que $U_{n+1} < U_n$ et montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$.

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}$. Or $\sqrt{3} > \frac{2\sqrt{3}}{3}$, donc $U_n > \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$

$\implies U_n \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[\cdot$ De même $U_{n+1} \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

On a $U_n \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ et $U_{n+1} \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$. f étant strictement croissante sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, donc si $U_{n+1} < U_n$ alors $f(U_{n+1}) < f(U_n)$ ·
Or $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $f(U_n) = U_{n+1}$, donc $U_{n+2} < U_{n+1}$.

- Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n$. D'où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **(0,5 pt)**

4) D'après la question 2), $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq \sqrt{3}$. Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{3}$ · Or $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. **(0,5 pt)**
Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \geq \sqrt{3} \Longrightarrow \ell \geq \sqrt{3} \Longrightarrow \ell \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ ·
Or f est continue sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, donc f est continue en ℓ ·
Par hypothèse, $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = f(U_n)$. On a aussi, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ et f est continue en ℓ, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \iff \frac{1}{x} + \frac{3}{4}\, x = x \iff \frac{4 + 3\,x^2}{4\,x} = x.$
$\iff 4 + 3\,x^2 = 4\,x^2 \iff 4 = 4\,x^2 - 3\,x^2 \iff 4 = x^2.$
$\iff x = 2$ ou $x = -2$.
Or $x > 0$; donc $x = 2$. D'où $\ell = 2$. **(0,5 pt)**

PROBLEME

PATIE A

1) Résolvons l'équation différentielle (E') : $\frac{1}{2}\, y' + y = 0$.
$$(E')\colon \frac{1}{2}\, y' = -y \iff y' = -2y \iff y(x) = \lambda\, e^{-2x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\,\cdot$$
D'où l'ensemble des solutions de (E') est l'ensemble des fonctions y définies par :
$y(x) = \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,25 pt)**

2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\, e^{-2x} + b$ où a et b sont des réels.
Déterminons a et b pour que h soit une solution de (E).
On a $h'(x) = ae^{-2x} - 2ax\, e^{-2x}$; $\frac{1}{2}\, h'(x) = \frac{1}{2} ae^{-2x} - axe^{-2x}$ ·
$$\frac{1}{2} h'(x) + h(x) = \frac{1}{2} ae^{-2x} - ax\, e^{-2x} + axe^{-2x} + b = \frac{1}{2} ae^{-2x} + b.$$
h est solution de $(E) \iff \frac{1}{2}\, h'(x) + h(x) = 3e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$ ·
$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$$
$a = 6$ et $b = 2$. **(0,5 pt)**

3) a) g est solution de $(E) \iff \frac{1}{2}\, g'(x) + g(x) = 3\, e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Or $\frac{1}{2}\, h'(x) + h(x) = 3e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Donc
g est solution de $(E) \iff \frac{1}{2} g'(x) + g(x) = \frac{1}{2} h'(x) + h(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\iff \frac{1}{2}\, g'(x) - \frac{1}{2}\, h'(x) + g(x) - h(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\iff \frac{1}{2}\, (g - h)'\,(x) + (g - h)\,(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\iff g - h$ est solution de (E'). **(0,5 pt)**

b) Déduisons-en l'ensemble des solutions de (E).
Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
g est solution de $(E) \iff g - h$ est solution de $(E') \iff g(x) - h(x) = \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow g(x) = h(x) + \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g(x) = 6xe^{-2x} + 2 + \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g(x) = (6x + \lambda)e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme
$g : x \longmapsto (6x + \lambda)e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

4) Déterminons la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O.
k est solution de $(E) \Leftrightarrow k(x) = (6x + \lambda)\, e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus, la courbe représentative (C_k) de k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O équivaut à $O(0,0) \in (C_k)$
$\Leftrightarrow k(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$.
D'où $k(x) = (6x - 2)e^{-2x} + 2$. **(0,25 pt)**

PARTIE B

Soient f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (6x-2)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) Justifions que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x \le 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$.
D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **(0,5 pt)**

2) Etudions les limites aux bornes de D_f et interprétons graphiquement, si possible, les résultats obtenus.
$\lim\limits_{x \to -\infty} 6x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 6x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$
D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (6x - 2)e^{-2x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (6x - 2)e^{-x} + 2 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. **(0,25 pt)**

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} x = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} |1 - x| = 0^+$; $\lim\limits_{x \to 1} \ln|1 - x| = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} x + \ln|1 - x| = -\infty$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to1^-} x + \ln|1-x| = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} 1 - x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty. \quad \textbf{(0,25 pt)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to1^+} x + \ln|1-x| = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} 1 - x = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty. \quad \textbf{(0,25 pt)}$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f). **(0,25 pt)**
Etudions la limite de f en $+\infty$.
Supposons que $x > 1$.
Alors $1 - x < 0$ et $|1 - x| = x - 1$.

$$f(x) = \frac{x + \ln(x-1)}{1-x} = \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(x-1)}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x}=-1.$$

Posons $t=x-1$. $\quad x\to+\infty \iff t\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1.$ **(0,25 pt)**

La droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. **(0,25 pt)**

3) Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interprétons graphiquement le résultat.

Supposons que $x<0$.

Alors $\frac{f(x)}{x}=\frac{(6x-2)\,e^{-2x}+2}{x}=\left(\frac{6x-2}{x}\right)e^{-2x}+\frac{2}{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{x}=6$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6x-2}{x}\right)e^{-2x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty.$ **(0,25 pt)**

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$. **(0,25 pt)**

4) Etudions la continuité de f en 0.

On a $f(0)=[6(0)-2]\,e^{-2(0)}+2=-2+2=0$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(6x-2)e^{-2x}+2=[6(0)-2]e^{-2(0)}+2=0.$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x}=\dfrac{0+\ln|1-0|}{1-0}=\dfrac{0}{1}=0.$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=0.$

Or $f(0)=0$, donc

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$; *d'où* f est continue en 0. **(0,5 pt)**

5) Etudions la dérivabilité de f en 0.

Supposons que $x<0$.

On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(6x-2)e^{-2x}+2}{x}=6\,e^{-2x}+\frac{-2e^{-2x}+2}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=6\,e^{-2x}-2\left(\frac{e^{-2x}-1}{x}\right)=6\,e^{-2x}+4\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)$

On a d'une part, $\lim\limits_{x\to0^-}6e^{-2x}=6$.

D'autre part, posons $t=-2x$.

$x\to0^-\iff t\longrightarrow0^+$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{-2x}-1}{-2x}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{t}-1}{t}=1$; $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=6+4(1)$. Ce qui implique que

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=10$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0)=10$. **(0,25 pt)**

Supposons que $0<x<1$

On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+\ln(1-x)}{1-x}}{x}=\frac{x+\ln(1-x)}{x\,(1-x)}=\frac{x}{x\,(1-x)}+\frac{\ln(1-x)}{x\,(1-x)}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}\times\frac{\ln(1-x)}{-x}$

D'une part, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1-x}=1.$

D'autre part, posons $t=-x$.

$$x\to0^+\iff t\longrightarrow0^-.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

D'où $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 - 1 \times 1 = 1 - 1 = 0.$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et f'_d (0) = 0. **(0,25 pt)**

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétons géométriquement les résultats obtenus.

(C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et une demi-tangente horizontale à droite. **(0,5 pt)**

6) Calculer $f'(x)$ puis étudions son signe sur $]-\infty, 0[$.

On a $\forall\, x \in\,]-\infty, 0[, f(x) = (6x-2)\, e^{-2x} + 2$

$f'(x) = 6\, e^{-2x} - 2\,(6\,x-2)\, e^{-2x} = [6 - 2(6x-2)]\, e^{-2x} = (-12x+10)\, e^{-2x}$

$f'(x) = 2\,(-6x+5)\, e^{-2x}.$

$\forall\, x \in\,]-\infty, 0[, -6x+5 > 0$ et $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x) > 0.$ **(0,25 pt)**

Calculer $f'(x)$ puis étudions son signe sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$.

On a $\forall\, x \in\,]0, +\infty[\setminus\{1\}, f(x) = \frac{x+\ln|1-x|}{1-x}.$

$f'(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)(1-x) - (-1)\,(x+\ln|1-x|)}{(1-x)^2}.$

$f'(x) = \frac{1-x-1+x+\ln|1-x|}{(1-x)^2} = \frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$

$\forall\, x \in\,]0, +\infty[\setminus\{1\}, (1-x)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\ln|1-x|$.

$\ln|1-x| > 0 \Leftrightarrow |1-x| > 1 \Leftrightarrow 1-x < -1$ ou $1-x > 1.$

$\Leftrightarrow -x < -2$ ou $-x > 0 \Leftrightarrow x > 2$ ou $x < 0.$

$x < 0$ est impossible car $x \in\,]0, +\infty[\setminus\{1\}.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in\,]2, +\infty[$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in\,]0, 1[\, \cup\,]1, 2[.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$ **(0,5 pt)**

7) Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

$f(2) = \frac{2+\ln|1-2|}{1-2}$

$f(2) = -2.$

(0,5 pt)

8) Montrons sur l'intervalle $]1\,, 2[$ que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,2 < \alpha < 1,3.$

On a f est continue et strictement décroissante sur $]1,2[$, donc Montrer sur l'intervalle $]1\,,2[$ que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que

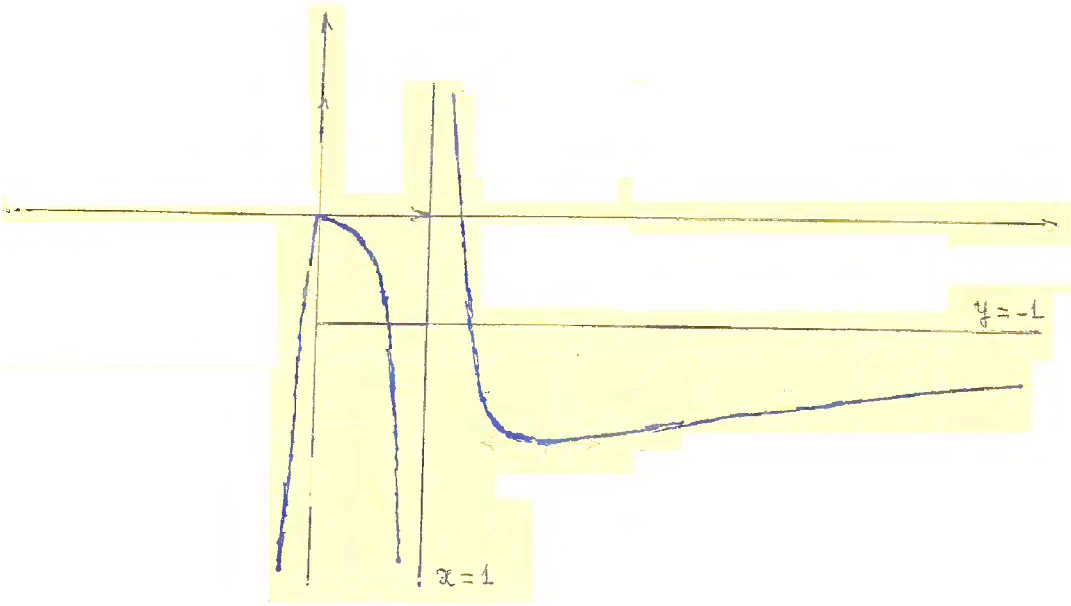
$1,2 < \alpha < 1,3.$ est une bijection de $]1,2[$ sur $f(]1,2[) =]-2, +\infty[$. Or $0 \in\,]-2, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

$1,2 \in\,]1,2[$ et $1,3 \in\,]1,2[$. De plus $f(1,2) \simeq 2$ et $f(1,3) \simeq -0,3$

D'où $f(1,2) \times f(1,3) < 0 \Longrightarrow 1,2 < \alpha < 1,3.$ **(0,5 pt)**

9) Construisons (C_f) et ses asymptotes.

$f(3) \simeq -1,85$; $f(4) \simeq -1,7$; $f(1,5) \simeq -1,5$ et $f(0,5) \simeq -0,39.$



(0,75 pt)

10) Calculons en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x = 2, x = 3$, $y = -1$ et la courbe (C_f) de f.

On a $A(E) = \int_2^3 [-1 - f(x)]\, dx \times u.a$, ($u.a$=unité d'aire).

$\forall\, x \in [2,3]$, on a :

$$-1 - f(x) = -1 - \frac{x+\ln|1-x|}{1-x} = \frac{-1+x-x-\ln(x-1)}{1-x}$$

$$-1 - f(x) = \frac{-1-\ln(x-1)}{1-x} = \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

$$= [\ln(x-1)]' + \frac{1}{x-1}\ln(x-1) = \big[\ln[x-1]\big]' + [\ln(x-1)]'\ln(x-1).$$

D'où $-1 - f(x) = [\ln(x-1)]' + \left[\frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]' = \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]'$.

Ce qui implique que $A(E) = \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]_2^3 \times u.a = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times u.a.$

On sait que $1\, u.a = 2\, cm \times 2\, cm = 4\, cm^2$; $A(E) = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times 4\, cm^2$

$A(E) = (4\ln 2 + 2\ln^2 2)\, cm^2$ $d'où$ $A(E) \simeq 3{,}73\, cm^2$ **(0,5 pt)**