UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

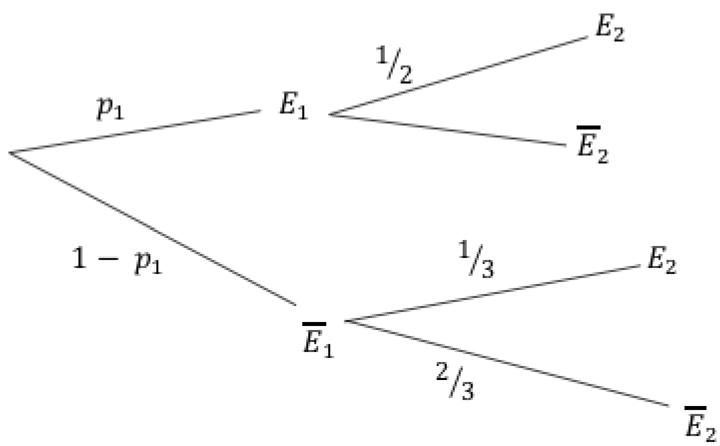
n° 1-19 G 26 A - 20
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5
Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S
C O R R I G É

Exercice 1 ($\mathbf{04,5}$ points).

1. $p_1 = \dfrac{30}{45} = \dfrac{2}{3}$. **0, 5 pt**

2. On donne l'arbre de choix pour déterminer les probabilités conditionnelles.



a. $p(E_2/E_1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(E_2/\overline{E}_1) = \dfrac{1}{3}$. **(0, 25 + 0, 25)pt**

b. $p(E_2) = p(E_2/E_1) \times p(E_1) + p(E_2/\overline{E}_1) \times p(\overline{E}_1) = \dfrac{4}{9}$. **0, 5 pt**

3.

$$E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E}_n),$$

d'après l'axiome des probabilités totales. D'où

$$p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$$

car $E_{n+1} \cap E_n$ et $E_{n+1} \cap \overline{E}_n$ sont des événements incompatibles.
Donc

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}/E_n) \times p_n + p(E_{N+1}/\overline{E}_n) \times p(\overline{E}_n).$$

Ce qui donne

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{3} \times (1 - p_n).$$

D'où $p_{n+1} = \dfrac{1}{6}\, p_n + \dfrac{1}{3}$. **0, 75 pt**

4. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}\, p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}.$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}\,p_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right).$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n.$$

0, 5 pt

D'où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $u_1 = \frac{4}{15}$. **(0, 25 + 0, 25 pt)**

b. $u_n = u_1(\frac{1}{6})^{n-1}$, d'où $u_n = \frac{4}{15}(\frac{1}{6})^{n-1}$ et $p_n = \frac{4}{15}(\frac{1}{6})^{n-1} + \dfrac{2}{5}$ pour $n \geq 1$. **(0, 5 + 0, 5) pt**

c. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{2}{5}$ car $q = \frac{1}{6} < 1$. **0, 25 pt**

Exercice 2 (05, 5 points).

Partie A

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1. Déterminons le polynôme Q tel que, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.

En faisant la division euclidienne de $f(z)$ par $z^3 - 1$ ou trouve que $Q(z) = z^2 + 2z + 2$. **0, 5 pt**

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.

$f(z) = 0$ si, et seulement si $(z^3 - 1)(z^2 + 2z + 2) = 0$.

$$z^3 - 1 = 0 \ \text{ ou } \ z^2 + 2z + 2 = 0.$$
$$(z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \ \text{ ou } \ z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Ce qui donne $z = 1$ ou $z = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -1-i$ ou $z = -1+i$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est :

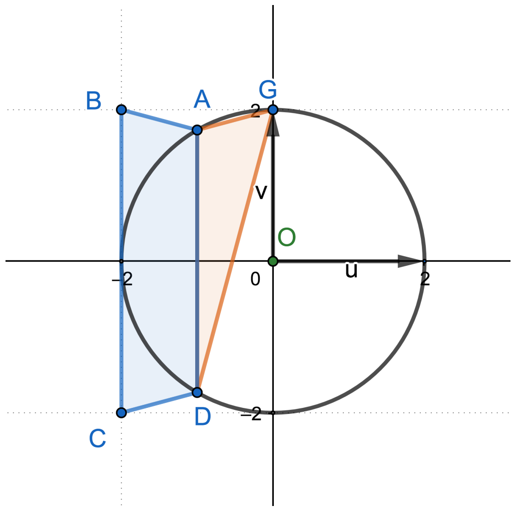
$$S = \left\{1; -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; -1-i; -1+i\right\}.$$

0, 5 pt

3. a. Ecriture des solutions de (E) sous forme trigonométrique :

On pose :
— $z_0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ car $\arg(1) = 0\,[2\pi]$.
— $z_1 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $|z_1| = 1$ et $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
d'où $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$,
— $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \overline{z}_1$, $|z_2| = 1$ et $\arg z_2 = -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
d'où $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}$,
— $z_3 = -1+i$, $|z_3| = \sqrt{2}$ et $\arg z_3 = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
d'où $z_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}$,
— $z_4 = -1-i = \overline{z}_3$, $|z_4| = \sqrt{2}$ et $\arg z_4 = -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
d'où $z_4 = \cos\frac{3\pi}{4} - i \sin\frac{3\pi}{4}$. **0, 5 pt**

b. Plaçons les points G, A, D, B et C d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



0, 5 pt

Partie B

1. La nature du quadrilatère ABCD :
$z_{\overrightarrow{BC}} = -2i$ et $z_{\overrightarrow{AD}} = -i$ d'où $z_{\overrightarrow{BC}} = 2z_{\overrightarrow{AD}}$ ce qui implique que (BC) et (AD) sont parallèles.
$z_{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $z_{\overrightarrow{CD}} = \frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}$ non réel donc (AB) et (CD) sont sécantes.

Or (BC) et (AD) parallèles, et puis $AB = CD$ donc $ABCD$ est un trapèze isocèle. **0, 5 pt**

2. r étant une rotation de centre Ω qui transforme A en D. On a : $r(\Omega) = \Omega$ et $r(A) = D$.

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à r, alors
$f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.

$r(\Omega) = \Omega$ équivaut à $f(z_\Omega) = z_\Omega$ et $r(A) = D$ équivaut à $f(z_A) = z_D$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \\ z_D = az_A + b \end{cases}$$

$$a = \frac{z_D - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$b = z_\Omega - az_\Omega = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

ce qui donne

$$f(z) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

0, 5 pt

3. <u>Nature du triangle ΩAD</u> :

On sait que $r(A) = D$ donc $\Omega A = \Omega D = 3$, or $AD = |z_D - z_A| = \sqrt{3}$,

d'où le triangle ΩAD est isocèle en Ω. **0, 5 pt**

4. Soit S le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD.

Puisque le triangle ΩAD est isocèle en Ω donc S appartient à la médiatrice du segment $[AD]$ qui est l'axe réel, ce qui implique que

z_S l'affixe de S est réelle et $SA = SD$.

On pose $z_S = x$ ($x \in \mathbb{R}$), puisque S est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD on a aussi : $|z_S - z_\Omega| = |z_S - z_D|$,

ce qui implique $|x-1| = |x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}|$ d'où

$$(x-1)^2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

ou

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

Ce qui donne $x = 0$.

Donc S est confondu avec O l'origine du repère d'affixe 0. **0,5 pt**

5. $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$, où z_A est l'affixe du point A.

On sait que $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, d'où

$$u_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}.$$

u_n est réel si, et seulement si $\sin\frac{2\pi}{3}n = 0$, ce qui implique :

$$\frac{2\pi}{3}n = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*$$

ou

$$n = \frac{3}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En prenant $k = 2$, alors 3 est la valeur minimale de n pour que u_n soit un réel. **1 pt**

6. La forme algébrique de u^{2019} :

$$u_{2019} = e^{i\frac{4038\pi}{3}} = e^{i1346\pi}$$

d'où

$$u_{2019} = 1.$$

0,5 pt

PROBLEME (10 points).

Partie A

Soit g la fonction numérique définie pour tout réel x par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{x}{2}} = +\infty$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. **0,25 pt**

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X = 0$ ce qui implique après un changement de variable que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. **0,5 pt**

2.

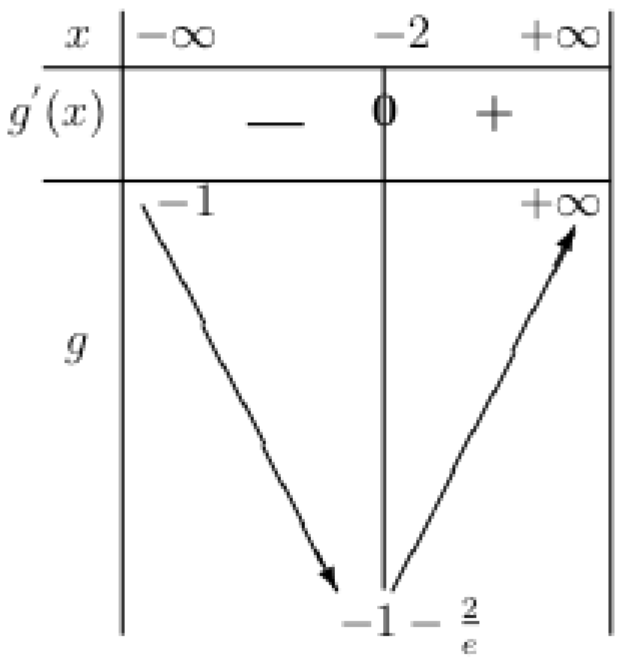
$$\left\{\begin{array}{c} x \to e^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par composée,} \\ x \to xe^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit,} \\ \text{d'où } g : x \to -1 + xe^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par somme.} \end{array}\right.$$

$$g^{'}(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x)$$

$$g^{'}(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+2)$$

$g^{'}(x)$ a le même signe que $x+2$:

sur $]-\infty;-2[$ $g^{'}(x) < 0$; sur $]-2;+\infty[$ $g^{'}(x) > 0$ et $g^{'}(x) = 0$ si $x = -2$. **0,5 pt**



0,5 pt

3. g est continue et strictement croissante sur $]-2;+\infty[$, donc g est une bijection de $]-2;+\infty[$ sur $g(]-2;+\infty[) =]-1-\frac{2}{e};+\infty[$.

Or $0 \in]-1-\frac{2}{e};+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-2;+\infty[$.

$g(0.70) \simeq -0.007$ et $g(0.71) \simeq 0.012$, d'où $g(0.7) \times g(0.71) < 0$ donc $\alpha \in]0.70;0.71[$. **0,75 pt**

Sur $]-\infty;\alpha[$ $g(x) < 0$; sur $[\alpha;+\infty[$ $g(x) \geq 0$. **0,5 pt**

Partie B

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}}$.

a.

$$\left\{\begin{array}{c} x \to e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par composée,} \\ x \to x-2 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \to (2x-4)e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit,} \\ \text{d'où } f : x \to -x+2+(2x-4)e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par somme.} \end{array}\right.$$

$f^{'}(x) = -1 + e^{\frac{x}{2}}(2 + \frac{1}{2}(2x-4)) = -1 + e^{\frac{x}{2}}(2 + x - 2) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$,

d'où $f^{'}(x) = g(x)$ pour tout réel x. **0,5 pt**

b. Donc $f^{'}(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$; $f^{'}(x) \geq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$. **0,5 pt**

c. On sait que, d'après 3) **<u>Partie A</u>**, $g(\alpha) = 0$ ce qui est équivalent à $\alpha e^{\frac{\alpha}{2}} = 1$ ou encore

$e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \in]0.70; 0.71[$.

d'où $f(\alpha) = -\alpha + 2 + (2\alpha - 4)\dfrac{1}{\alpha}$.

Donc $f(\alpha) = 4 - \alpha - \dfrac{4}{\alpha}$. **0,5 pt**

2. $0.70 \leq \alpha \leq 0.71$ ce qui implique $4 - \frac{4}{0.70} - 0.71 \leq 4 - \frac{4}{\alpha} - \alpha \leq 4 - \frac{4}{0.71} - 0.70$, d'où

$$-2.4 \leq f(\alpha) \leq -2.3,$$

0,5 pt

3. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)(1 - 2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty$, **0,5 pt**

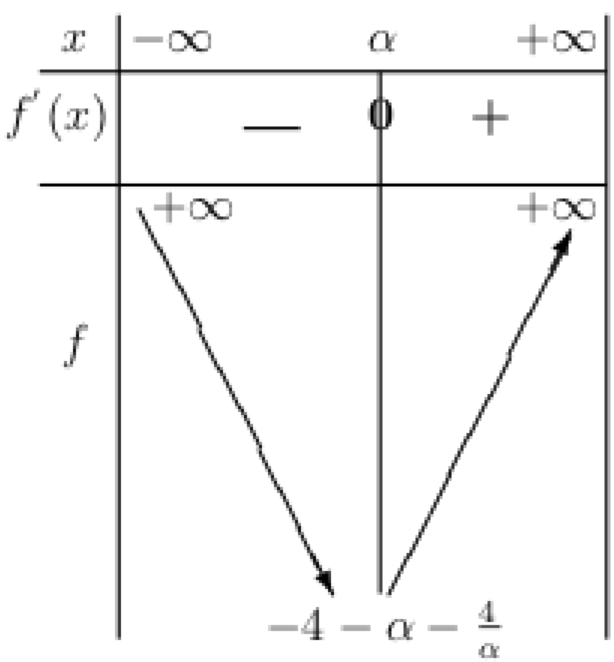
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1 + \frac{2}{x})(1 - 2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty$. **0,25 pt**

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)(1 - 2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty$, **0,25 pt**

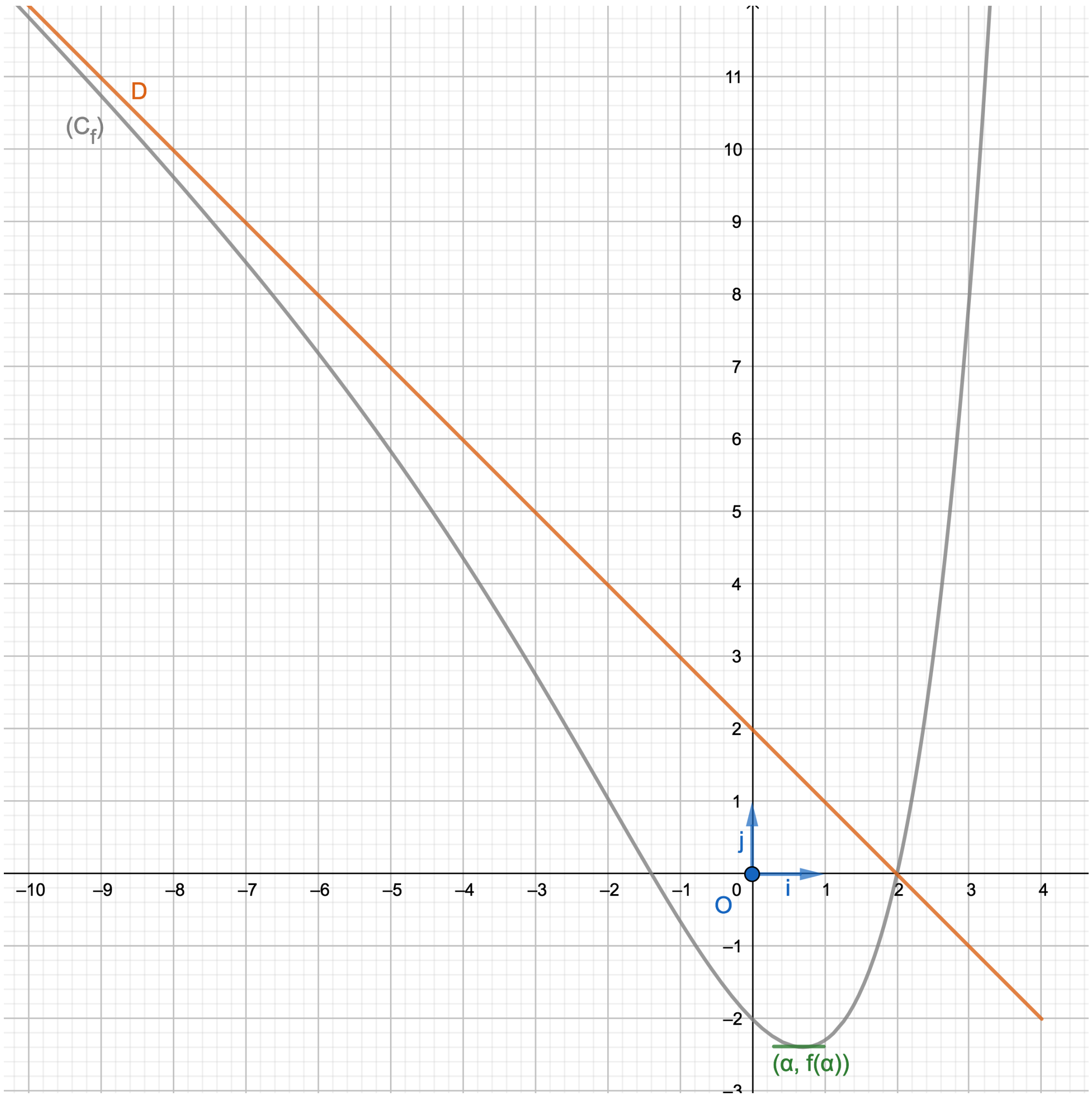
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (-x+2)) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} = 0$,

donc $(D) : y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathbf{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$. **0,5 pt**

5. **0,5 pt**



6. **1, 5 pt**



7. $I(x) = \int_0^x (2t-4)e^{\frac{t}{2}}dt = \left[(4t-16)e^{\frac{t}{2}}\right]_0^x$ d'où

$$I(x) = (4x-16)e^{\frac{x}{2}} + 16.$$

0, 75 pt

8. $A = \int_\lambda^0 (-x+2+x-2-(2x-4)e^{\frac{t}{2}})dx \times u.a = \int_0^\lambda (2x-4)e^{\frac{x}{2}}dx \times 4cm^2 = \left[(4\lambda-16)e^{\frac{\lambda}{2}} + 16\right] \times 4cm^2$,

$$A = \left[(16\lambda - 64)e^{\frac{\lambda}{2}} + 64\right] cm^2.$$

0, 25 pt

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[(16\lambda - 64)e^{\frac{\lambda}{2}} + 64\right] cm^2 = 64cm^2.$$

0, 5 pt