UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

1^{er} groupe

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

Exercice 1 (07 points).
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie A

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Complétons ces propriétés sur les modules et arguments de nombres complexes ci-après :

a. $|z^n| = |z|^n$; **b.** Si z' non nul, alors $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; **(0,25 + 0,25) pt**

c. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$, n un entier naturel ; **0,25 pt**

d. Si z' non nul, alors $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$. **0,25 pt**

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Nous avons les interprétations géométriques suivantes :

a. $|z_B - z_A| = AB$; **b.** $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_C}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$. **(0,25 + 0,25) pt**

3. Formule de Moivre : Pour tout entier relatif n et tout réel θ on a :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. **0,5 pt**

Partie B

s est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3 z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. Soit $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de s.
Calculons a^3 et a^2.
On sait que $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où
$a^3 = e^{i\pi} = -1$, **0,25 pt**
et $a^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,25 pt**
Ainsi $z' = -z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,25 pt**
Déterminons l'ensemble des points invariants de s.
Soit $\Omega(z_0)$ tel que $s(\Omega) = \Omega$, on a $z_0 = -z_0 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $z_0 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
s admet un unique point invariant le point Ω d'affixe $z_0 = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **0,25 pt**
On a $z' - z_0 = -z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = -z - \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = -(z - z_0)$.
Ce qui donne, pour tout $z \neq z_0$, $\dfrac{z' - z_0}{z - z_0} = -1$,
ceci implique, pour tout $z \neq z_0$ que $|z' - z_0| = |z - z_0|$ et $\arg(\dfrac{z' - z_0}{z - z_0}) = \pi\ [2\pi]$. **0,5 pt**

D'où pour tout point $M(z)$ distinct de Ω, d'image par s le point $M'(z')$, on a :
$\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \pi \ [2\pi]$.
Donc s est une symétrie centrale de centre Ω. **0,5 pt**

2. Déterminons les nombres complexes a pour lesquels :

a. s est une translation.

On sait que s est une translation si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = 1$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = 1$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = 0\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{2k\pi}{3}, \ \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes a pour lesquels s est une translation sont :
$a_0 = 1$, $a_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
Ou encore $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $a_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **0,75 pt**

b. s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

On sait que s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -i$. **0,25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = i^3$ ou encore $a^3 - i^3 = 0$. Ce qui donne $(a - i)(a^2 + ai - 1) = 0$.
On trouve $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0,75 pt**

Autre méthode :
$z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
On a $|a|^3 = 1$, ce qui donne $|a| = 1$.
Et $3(\arg(a)) = \dfrac{3\pi}{2}\,[2\pi]$, ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, les nombres complexes a pour lesquels s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$ sont :
$a_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $a_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $a_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
Ou $a_0 = i$, $a_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. **0,75 pt**

c. s est une homothétie de rapport -8.

On sait que s est une homothétie de rapport -8 si et seulement si, z' s'écrit sous la forme :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0,25 pt**
Ainsi on résout l'équation $a^3 = (-2)^3$.
Ce qui donne $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) = 0$.
On trouve $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0,75 pt**

Autre méthode :
$z' = -8z + a^2$ avec $a \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à $a^3 = -8$. **0,25 pt**
Ainsi cherchons a tel que $a^3 = -8$.
On a $|a|^3 = 8$ ce qui donne $|a| = 2$.
Et $3(\arg(a)) = \pi\,[2\pi]$ ce qui donne $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ \ k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent les nombres complexes a pour lesquels s est une translation sont :
$a_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a_1 = 2e^{i\pi}$ et $a_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
Ou $a_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $a_1 = -2$ et $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$. **0,75 pt**

Exercice 2 (03 points).

1. On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.
Considérons l'ensemble $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \times \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ qui modélise les différents résultats de l'expérience aléatoire.

a. Les valeurs possibles de S sont : $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12.$ **0, 5pt**
Nous notons l'ensemble des résultats possibles, l'univers Ω.
Ω est représenté dans le tableau ci-dessous :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ainsi, nous avons le cardinal de Ω qui est égal au nombre de couples.

$card(\Omega) = 36.$ **0, 25pt**

b. Déterminons la probabilité d'obtenir une somme égale à 9.

Soit A l'événement "obtenir une somme égale à 9". On a d'après le tableau ci-dessus l'événement A est la réunion des événements élémentaires $\{(3,6)\}$, $\{(4,5)\}$, $\{(5,4)\}$, $\{(6,3)\}$.

$$A = \{(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3)\}.$$

Il faut noter ici que tous les couples ou événements élémentaires sont équiprobables.
D'où $p(A) = 4 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{9}$. **0, 25pt**

2. Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.

a. Soit B l'événement "afficher un score de 8" et C l'événement "afficher un score de 7".

$$B = \{(2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2)\},$$

et

$$C = \{(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\}.$$

D'où $p(B) = 5 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36}$ et $p(C) = 6 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Soit D l'événement "Marame et Birane affichent chacun un même score de 9, 7 ou 8".
Le résultat obtenu par Marame n'influence pas celui obtenu par Birane, et vice versa. Donc
$p(D) = p(A) \times p(A) + p(B) \times p(B) + p(C) \times p(C) = \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{36}{36^2} = \dfrac{77}{36^2}.$ **0, 75pt**

b. Soit E l'événement "ils affichent le même score".
Alors $p(E) = p(S=2) \times p(S=2) + p(S=3) \times p(S=3) + ... + p(S=12) \times p(S=12).$
Ce qui donne
$p(E) = \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{2}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{3}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{4}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{5}{36} + \dfrac{6}{36} \times \dfrac{6}{36} + \dfrac{5}{36} \times \dfrac{5}{36} + \dfrac{4}{36} \times \dfrac{4}{36} + \dfrac{3}{36} \times \dfrac{3}{36} + \dfrac{2}{36} \times \dfrac{2}{36} + \dfrac{1}{36} \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{36^2} + \dfrac{4}{36^2} + \dfrac{9}{36^2} + \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{36}{36^2} + \dfrac{25}{36^2} + \dfrac{16}{36^2} + \dfrac{9}{36^2} + \dfrac{1}{36^2}.$

D'où $p(E) = \dfrac{146}{36^2} = \dfrac{73}{648}$. **0,5pt**

c. Celui qui affiche le plus grand score gagne.
Calculons la probabilité pour que Marame gagne.
Soit F l'événement "Marame gagne".
$p(F) = \frac{1}{36} \times \frac{35}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{33}{36} + \frac{3}{36} \times \frac{30}{36} + \frac{4}{36} \times \frac{26}{36} + \frac{5}{36} \times \frac{21}{36} + \frac{6}{36} \times \frac{15}{36} + \frac{5}{36} \times \frac{10}{36} + \frac{4}{36} \times \frac{6}{36} + \frac{3}{36} \times \frac{3}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{36}$.
Ce qui donne $p(F) = \dfrac{575}{1296}$. **0,75pt**

Autre méthode :
Soit F l'événement "Marame gagne", G l'événement "Birane gagne" et E l'événement "ils affichent le même score".

On a $p(F) + p(G) + p(E) = 1$. Or $p(F) = p(G)$, ce qui implique $p(F) = \dfrac{1 - p(E)}{2} = \dfrac{1 - \frac{73}{648}}{2}$.
Ce qui donne $p(F) = \dfrac{575}{1296}$. **0,75pt**

PROBLEME (10 points).

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2} & si \;\; x \leq 0 \\ \\ x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Etablissons que f est définie sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \longmapsto x + 1$ est définie partout dans $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction $x \longmapsto \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$ est définie par composée si $e^x \neq -2$, ce qui est toujours vrai.
D'où $x \longmapsto x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$ est définie par somme, si $x \leq 0$.

— La fonction $x \longmapsto x + 2$ est définie partout dans $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie par produit puis par composée si $x > -1$, donc elle est définie si $x > 0$.
D'où $x \longmapsto x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie si $x > 0$.

Par conséquent f est définie sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

2. a. Etudions la continuité de f en 0.

— $f(0) = 0 + 1 + \dfrac{3e^0}{e^0 + 2} = 2$,

— $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + 1 + \frac{3e^x}{e^x + 2} = 2$, **0,25 pt**

— $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x>0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + 2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 2$. **0,25 pt**

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$, d'où f est continue en 0. **0,25 pt**

b. Pour $x < 0$, montrons que $\dfrac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)}$.

$\dfrac{f(x)-2}{x-0} = \dfrac{x+1+\dfrac{3e^x}{e^x+2}-2}{x} = \dfrac{x-1+\dfrac{3e^x}{e^x+2}}{x} = \dfrac{x+\dfrac{2e^x-2}{e^x+2}}{x} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x(e^x+2)}$, d'où le résultat. **0, 5 pt**

Déduisons-en $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$$\lim_{x\to 0,\ x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0,\ x<0} \frac{f(x)-2}{x-0} = \lim_{x\to 0,\ x<0} 1 + \frac{2(e^x-1)}{x} \times \frac{1}{(e^x+2)} = 1 + 2 \times \frac{1}{3}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{5}{3}$. **0, 25 pt**

c. Concluons sur la dérivabilité de f en 0 et interprétons graphiquement les résultats.

Calculons $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et comparons la avec le résultat précédent.

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{x+2+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}-2}{x} = \lim_{x\to 0,\ x>0} 1 + \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x} = 2.$$

$\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, donc f n'est pas dérivable en 0. **0, 25 pt**

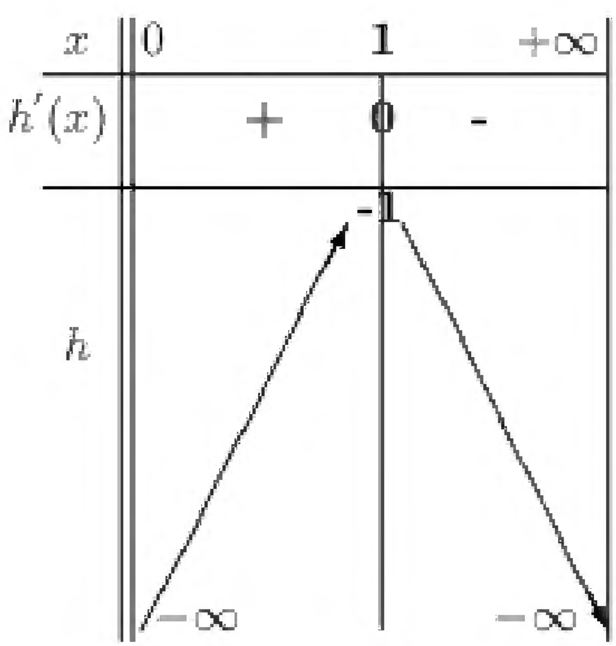
La courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une demi-tangente de pente $\dfrac{5}{3}$ en 0 à gauche et une demi-tangente de pente 2 en 0 à droite. **0, 25 pt**

3. a. En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrons que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$.

h est définie si $x > 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) - x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\dfrac{\ln x}{x} - 1) = -\infty$

$h'(x) = \dfrac{1-x}{x}$, $h'(x) \geq 0$ sur $]0;1]$ et $h'(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$



0, 25pt

D'après le tableau de variations de h, pour tout $x > 0$, $h(x) \leq -1$. Ce qui implique que $h(x) < 0$ pour tout $x > 0$, d'où le résultat. **0,25pt**

Déduisons en que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$.

$\ln(x) < x$ pour $x > 0$, ceci implique que pour $x > 0$, $\ln(x+1) < x+1$.
Or si $x > 0$ alors $x+1 > 1$, ce qui donne $(x+1)^2 > x+1$.
Par conséquent, $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. **0,5pt**

b. Calculons $f'(x)$ pour $x > 0$

Pour $x > 0$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Ce qui donne $f'(x) = 1 + \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$, ou encore

$f'(x) = \dfrac{1 + (x+1)^2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$ **0,5pt**

Déterminons le signe de $f'(x)$ pour $x > 0$.

D'après **3.a.** $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$, ce qui implique que
$(x+1)^2 - \ln(x+1) > 0$, pour $x > 0$.
D'où $1 + (x+1)^2 - \ln(x+1) > 0$ pour $x > 0$.
Par conséquent $\dfrac{1 + (x+1)^2 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} > 0$ pour $x > 0$, car $(x+1)^2 > 0$ pour tout x.
Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. **0,5 pt**

c. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$.

Pour $x < 0$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$.

Ce qui donne $f'(x) = 1 + \dfrac{3e^x(e^x+2) - 3e^{2x}}{(e^x+2)^2}$ pour $x < 0$, ou encore

$f'(x) = 1 + \dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2}$, pour $x < 0$. **0,5 pt**

Signe de $f'(x)$ pour $x < 0$.

Pour tout x, $\dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2} > 0$. D'où $1 + \dfrac{6e^x}{(e^x+2)^2} > 0$ par somme, pour tout x.
Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x < 0$. **0,25 pt**

4. a. Calculons les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+2}$.

On sait que, d'une part $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3e^x}{e^x+2} = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$

On peut conclure que $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x+2} = -\infty$. **0,25 pt**

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Posons $X = x + 1$. Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.
Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.
On a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$

On peut conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$. **0,25 pt**

b. Calculons $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$.

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x}{e^x+2} = 0$, d'après ce qui précède. **0,25 pt**

Interprétation graphique du résultat :
La droite (D_1) d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$. **0,25 pt**

c. Calculons $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$.

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$, d'après ce qui précède. **0,25 pt**

Interprétation graphique du résultat :
La droite (D_2) d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **0,25 pt**

d. Etude du signe de $f(x)-(x+1)$ pour $x<0$.
Pour $x<0$, $f(x)-(x+1) = \dfrac{3e^x}{e^x+2}$. Or $e^x>0$ pour tout x, d'où $\dfrac{3e^x}{e^x+2}>0$ pour tout x, précisément pour tout $x<0$. Donc $f(x)-(x+1)>0$ pour $x<0$. **0,25 pt**
Montrons que $f(x)-(x+2)>0$ pour $x>0$.
Pour $x>0$, $f(x)-(x+2) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.
On sait que $\ln y>0$ pour tout $y>1$. Or pour $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>0$ pour $x>0$.
D'où $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>0$ pour $x>0$ ou encore $f(x)-(x+2)>0$ pour $x>0$. **0,25 pt**

Interprétation graphique des résultats :

- $f(x)-(x+1)>0$ pour $x<0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction est au dessus de la droite (D_1) au voisinage de $-\infty$.
- $f(x)-(x+2)>0$ pour $x>0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction est au dessus de la droite (D_2) au voisinage de $+\infty$.

0,25 pt

5. Soit $\mathbb{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ **au point** $A(x_0,\ y_0)$, parallèle à l'asymptote pour $x>0$.
Alors $\mathbb{T}$ a une équation de la forme $y = x - x_0 + y_0$.
$A \in \mathbb{T}\cap\mathcal{C}_f$, d'où les coordonnées de A vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ y_0 = x_0 + 2 + \dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0+1}, \qquad \text{avec } x_0>0. \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{1+(x_0+1)^2-\ln(x_0+1)}{(x_0+1)^2} = 1 \\ y_0 = x_0 + 2 + \dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0+1}, \qquad \text{avec } x_0>0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x_0 = e-1 \\ y_0 = e+1+\dfrac{1}{e} \end{cases}$$ D'où A a pour coordonnées $(e-1, e+1+\dfrac{1}{e})$. **0,25 pt**

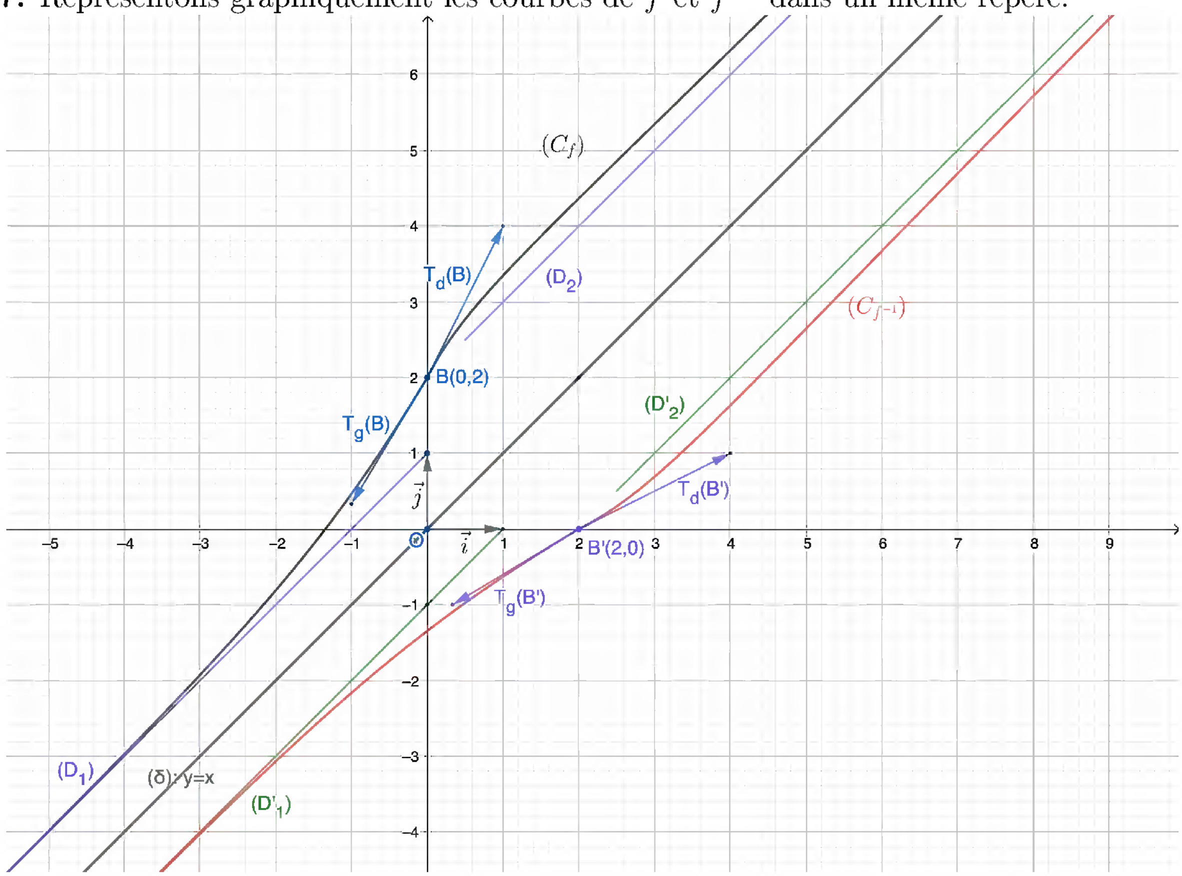
6. Dressons d'abord le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{5}{3}$ || 2	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

0, 25pt

Etablissons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = \mathbb{R}$. **0, 25 pt**

7. Représentons graphiquement les courbes de f et f^{-1} dans un même repère.



1 pt

8. Calcul de $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx$.

$$\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx = \int_{-\ln 3}^{0} \frac{3e^x}{e^x+2}dx = 3\left[\ln(e^x+2)\right]_{-\ln 3}^{0} = 6\ln 3 - 3\ln 7.$$ **0, 5 pt**

9. Interprétation du résultat précédent en terme d'aire.

$\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0}\Big(f(x)-(x+1)\Big)dx \times u.a = (6\ln 3 - 3\ln 7)cm^2$ est l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D_1), les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = 0$. **$0,25$ pt**