UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

21G21NA0145
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

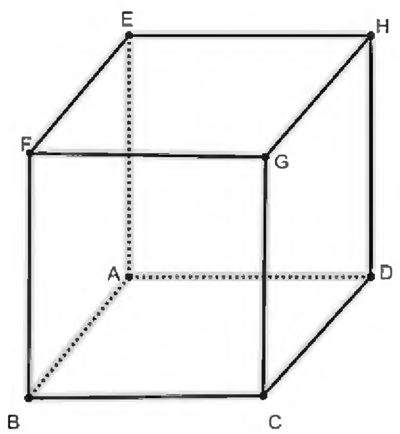
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

La figure $ABCDEFGH$ ci-dessous est un cube.



PARTIE A

Dans cette partie, on se propose de démontrer que le point de [AG] qui est tel que sa distance à A est égale à $\frac{1}{3}$AG est le centre de gravité du triangle BDE.

1. On pose l'arête du cube égale à 4 cm.

a) Reproduire la figure et montrer que la droite (BD) est perpendiculaire au plan (ACG). **(0,25 pt)**

b) Montrer que la droite (BE) est perpendiculaire au plan (AFG). **(0,25 pt)**

c) En déduire les positions relatives de (AG) et (BD) ; (AG) et (BE) et (AG) et (BDE). **(0,25 pt)**

d) Quelle est la nature exacte du triangle BDE ? Justifier la réponse. **(0,25 pt)**

e) Quelle est la nature exacte de $EACG$? Justifier la réponse. **(0,25 pt)**

2. Soit T le centre de gravité du triangle BDE et I le point d'intersection des droites (ET) et (BD).

a) Montrer que I est le milieu du segment $[AC]$ et que les droites (ET) et (AG) sont coplanaires. **(0,25 pt+0,25 pt)**

b) On pose T_1 le point d'intersection de (EI) et (AG). Montrer que $AT_1 = \frac{1}{3}AG$. **(0,25 pt)**

c) En déduire que $T = T_1$ · **(0,25 pt)**

PARTIE B

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Soit I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

- **a)** Donner les coordonnées des points I, J et K puis montrer qu'ils définissent un plan. **(0,5 pt)**
- **b)** Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 4; 0)$ est normal au plan (IJK). **(0,25 pt)**
- **c)** Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK). **(0,25 pt)**
- **d)** Justifier que les points A, I, J et K sont les sommets d'un tétraèdre et calculer le volume de ce tétraèdre. **(0,5 pt)**

2. Soit M un point de la droite (IJ).

- **a)** Montrer que M a pour coordonnées $(0 ; \frac{3}{4} ; \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0,25 pt)**
- **b)** Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du triangle AKM en fonction de α. **(0,5 pt)**
- **c)** Déterminer le point M_0 en lequel $A(\alpha)$ atteint son minimun. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (03,5 points)

On se propose de déterminer l'ensemble **S** des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$

1. On considère l'équation suivante : $(\boldsymbol{E})$: $12u + 11v = 1$

- **a)** Sans exhiber une solution, justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs (u, v) solution de $(\boldsymbol{E})$. **(0,5 pt)**
- **b)** Déterminer un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de $(\boldsymbol{E})$. **(0,5 pt)**

2. Montrer que pour tout couple $(u ; v)$ vérifiant $(\boldsymbol{E})$, l'entier $3 \times 12u + 4 \times 11v$ appartient à **S**. **(0,5 pt)**

3. Soit n un entier relatif appartenant à **S**. On pose $n_0 = 3 \times 12u_0 + 4 \times 11v_0$ ·

- **a)** Démontrer que $n - n_0 \equiv 0[132]$. **(0,5 pt)**
- **b)** En déduire qu'un entier relatif n appartient à **S** si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme $n = 132k - 8$ où k est un entier relatif. **(0,75 pt)**

4. Application

A l'occasion d'un colloque international de mathématiques, Mamour a remis à Farba de l'argent avec lequel Farba achète des cartes de crédit téléphonique qu'il distribue aux participants. Très fin mathématicien, Farba dit à ses étudiants :

« Avec l'argent que Mamour m'a remis, j'ai entre 800 et 1000 cartes de crédit de 1000 F. Si je fais des lots de 12 cartes, il m'en resterait 4 et si je fais des lots de 11 cartes, il m'en resterait 3.

Quelle somme d'argent ai-je dépensée ? »

Mettez-vous à la place des étudiants de Farba et répondez à la question. **(0,75 pt)**

PROBLEME (11,5 points)

PARTIE A (04,75 points)

Le plan complexe (P)est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.
Soit F l'application du plan complexe dans lui-même qui, à tout point $M(z)$, associe le points $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant : **(04 x 0,25 = 01 pt)**

Conditions sur a	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$	$a = \cdots$	$a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}$
Nature exacte de F			Rotation d'angle θ ($\theta \neq 0$ (2π)	

2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives i ,$1 - i$, $2 - 3i$ et $4 - 2i$.
Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe S transformant A en C et B en D, puis préciser sa nature exacte et ses éléments caractéristiques. **(0,5 pt)**

3. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) vérifiant : $x = (y - 5)(y - 3)e^{y-3} + 3$.
On désigne par (C_h) l'image de (Γ) par S.

a) Montrer que (C_h) est la courbe de la fonction h définie par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$. **(0,5 pt)**

b) Construire (C_h). **(0,5 pt)**

c) Calculer $I = \int_0^1 h(x)dx$ puis donner en cm² l'aire de la portion du plan délimitée par (C_h), $(O, \vec{u})$, $(O, \vec{v})$ et la droite d'équation $x = 1$. **(0,5 pt)**

4. On pose, pour tout entier naturel n $(n \geq 1)$, $J_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$.

a) Calculer J_1. **(0,25 pt)**

b) Montrer que : $\forall n \geq 1, J_{n+1} = \frac{n+1}{2} J_n - \frac{1}{2e^2}$. **(0,25 pt)**

c) Déterminer alors J_2, J_3 et J_4 · **(0,75 pt)**

d) Calculer en cm³ le volume du solide engendré par révolution autour de l'axe $(O, \vec{u})$, de la portion de (C_h) comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. **(0,5 pt)**

PARTIE B (01,25 point)

On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,; 0[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln|x|$.

1. Etudier les variations de g. **(0,5 pt)**

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in\ ]-4\,; -3[$. **(0,5 pt)**

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,25 pt)**

PARTIE C **(03,75 points)**

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln|x|} & , \text{ si } x < 0 \\ h(x) + e^{-x} & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. **(0,25 pt)**
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **(0,75 pt)**
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations. **(01 pt)**
(On pourra utiliser les résultats des parties A et B).
4. Etudier les branches infinies de (C_f). **(0,75 pt)**
5. Vérifier que : $f(\alpha) = 1 + \alpha$. **(0,25 pt)**
6. Construire la courbe (C_f). (on prendra $\alpha = -3{,}6$). **(0,75 pt)**

PARTIE D **(01,75 point)**

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$ **(0,5 pt)**
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq U_n \text{ et que } I + \frac{e-1}{e} \leq U_n \leq I + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}.$$ **(0,75 pt)**
3. Montrer que $(U_n), n \in \mathbb{N}^*$ est convergente et donner sa limite. **(0,5 pt)**