CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 6 pages.

Notations

On note : $|z|$ le module du nombre complexe z ,

J un intervalle de $[0,+\infty[$,

f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

g une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous réserve de son existence on note : $\tilde{f}_g(x)=\int_J f(t)g(xt)dt$ pour $x\in\,]0,+\infty[$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\tilde{f}(x)$ au lieu de $\tilde{f}_g(x)$.

Objectifs

Pour différentes hypothèses sur la fonction f, sur l'intervalle J et pour deux choix de la fonction g, on se propose de déterminer la limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans la partie I, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.

Dans la partie II, on considère une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t)=|\sin(t)|$, lorsque f est de classe C^1 ou lorsque f est continue par morceaux.

PARTIE I

Une étude de séries

I.1. Étude de la fonction L

Pour tout x réel tel que la série entière $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ converge, on note $L(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ sa somme.

I.1.1. Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction L est définie sur l'intervalle $]-1,1]$ et expliciter $L(x)$ pour x appartenant à $]-1,1[$.

I.1.2. Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$ (où ln désigne la fonction logarithme népérien).

I.2. Étude de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$: $a_{3p}=-\frac{2}{3p}$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$: $a_{3p+1}=\frac{1}{3p+1}$ et $a_{3p+2}=\frac{1}{3p+2}$.

I.2.1. Montrer que : $\sum_{k=1}^{3p}a_k=\sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}$.

I.2.2. Déterminer la limite de la somme $\sum_{k=1}^{3p}a_k$ lorsque p tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la fonction qui à t associe $\frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable). En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}a_k$ et préciser sa somme.

I.2.3. En déduire que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

I.3. Étude des séries $\sum_{k\geq 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$

Pour $t\in\left]0,2\pi\right[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $\varphi(t)=\frac{1}{\mathrm{e}^{it}-1}$ et $S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $\left]0,2\pi\right[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera que $\pi\leq\alpha<2\pi$.

I.3.1. Montrer que $S_n\left(t\right)=\varphi\left(t\right)\left[\mathrm{e}^{i(n+1)t}-\mathrm{e}^{it}\right]$.

I.3.2. Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur le segment $\left[\pi,\alpha\right]$.

I.3.3. Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{\alpha}\mathrm{e}^{i(n+1)t}\varphi(t)dt$ tend vers zéro lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.3.4. Expliciter $\int_{\pi}^{\alpha}S_n(t)dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{\mathrm{e}^{ik\alpha}}{k}$.

Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de ln(2) et de $\int_{\pi}^{\alpha}\mathrm{e}^{it}\varphi(t)dt$.

I.3.5. Exprimer $\mathrm{e}^{it}\,\varphi(t)$ en fonction de $\frac{\mathrm{e}^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où t appartient à $\left[\pi,\alpha\right]$.

I.3.6. En déduire la convergence des séries $\sum_{k\geq 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en I.2.3. ?

PARTIE II

Limite d'une intégrale

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\left|f(t)\right|\,dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\tilde{f}_g(x)=\int_0^{+\infty}f(t)g(xt)dt$ pour $x\in\left]0,+\infty\right[$.

II.1. Existence de $\tilde{f}_g(x)$

On suppose que la fonction g est bornée sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout x réel strictement positif. Montrer que la fonction $\tilde{f}_g$ est continue et bornée sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

II.2. Limite de $\tilde{f}_g(x)$ **lorsque** $g(t)=\mathrm{e}^{it}$

On suppose que la fonction *f* est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et à valeur réelle.

Soit $\tilde{f}_g(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$.

II.2.1. Justifier l'affirmation :

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un réel positif A tel que $\int_A^{+\infty}|f(t)|\,dt\le\varepsilon$.

II.2.2. Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$ tend vers zéro lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

II.2.3. En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $g(t)=|\sin(t)|$ **et on note simplement :**

$$\tilde{f}(x)=\int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,dt\quad .$$

II.3. Étude pour une fonction *f* particulière

On suppose (dans cet exemple) que *f* désigne la fonction E définie par $E(t)=\mathrm{e}^{-t}$ pour $t\in[0,+\infty[$ et donc $\tilde{E}(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,|\sin(xt)|\,dt$ pour $x\in]0,+\infty[$.

II.3.1. Pour $\gamma\in\mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma)=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\gamma y}\sin(y)\,dy$.

II.3.2. Montrer que pour $x \in]0,+\infty[$:

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} \left|\sin(u)\right| du .$$

II.3.3. Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} \left|\sin(u)\right| du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

II.3.4. Justifier, pour $x \in]0,+\infty[$, la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} e^{-\frac{k\pi}{x}}$; préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}}$.

II.3.5. Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

II.4. **Étude générale**

On désigne de nouveau par *f* une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \left|f(t)\right| dt$ converge et on note :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\left|\sin(xt)\right| dt \text{ pour } x \in]0,+\infty[.$$

II.4.1. Lemme préliminaire

Pour tout *t* réel tel que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$ converge, on pose $h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. Montrer que la fonction *h* est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Justifier l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|\sin(t)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t) .$$

II.4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas C^1

On suppose de plus que *f* est une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En utilisant les résultats obtenus en II.2 et II.4.1, déterminer la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque le réel *x* tend vers $+\infty$. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu pour la fonction *E* ?

II.4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux

II.4.3.1. Une limite

Étant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leq \beta < \delta$, on considère l'intégrale $F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)|\,dt$ pour $x \in]0,+\infty[$. Montrer que $F(x) = \frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\,du$.

On pose *p* la partie entière de $\frac{\beta x}{\pi}$ et *q* la partie entière de $\frac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de *F(x)* en fonction de *p, q* et *x*.

En déduire que *F(x)* tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque le nombre réel *x* tend vers $+\infty$.

II.4.3.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux

Si *J* est un intervalle de $[0,+\infty[$ et si *f* est une fonction continue par morceaux sur *J* à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\int_J |f(t)|\,dt$ existe, on note toujours :

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t)|\sin(xt)|\,dt .$$

Quelle est la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque le réel *x* tend vers $+\infty$:

- lorsque *J* est un segment de $[0,+\infty[$ et *f* une fonction en escalier ?
- lorsque *J* est un segment de $[0,+\infty[$ et *f* une fonction continue par morceaux ?
- lorsque *J* = $[0,+\infty[$ et *f* est une fonction continue par morceaux ?

Fin de l'énoncé