CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Notations, définitions et rappels

Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

Partie I

Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1 Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t$.

I.2 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

I.3 Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

I.3.2 Retrouver le résultat de la question **I.3.1** sans calcul, par des considérations géométriques.

I.4 Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$.
Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2.**

Partie II

Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole.
On considère, pour ce faire, la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par $f(t) = \frac{1}{t}$.

II.1 Expression intégrale de $L(f)$

II.1.1 Donner une expression intégrale de $L(f)$.

II.1.2 Montrer que $L(f)$ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à l'intervalle $[1,2]$.

II.2 Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique

II.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

II.2.2 Montrer que, pour tout $t \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)\, 2^{2n} (n!)^2} t^{4n-2}.$$

II.2.3 On note, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)\, 2^{2n} (n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

II.2.4 En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

II.2.5 Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

Partie III

Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geq 1$, aux fonctions puissances p_n définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ p_n(t) = t^n.$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1+n^2t^{2n-2}}dt.$$

III.1 Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2.

III.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

III.2 Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}dt = \mu_n$$

où :

$$\mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}.$$

III.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

III.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ainsi que la valeur de sa limite.

III.3 Plus généralement, montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a alors $L(f) < 2$.

Partie IV

Un résultat inattendu

IV.1 Etude de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$

IV.1.1 Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

IV.1.2 Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

IV.1.3 Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ est convergente.

IV.1.4 Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$.

IV.2 On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \dfrac{1}{t}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \displaystyle\int_x^1 g(t)\,dt$.

IV.2.1 Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

IV.2.2 Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

IV.2.3 Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty.$$

IV.3 Pour tout réel $x \in]0,1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x,1]$.
Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$, pour tout $x \in]0,1]$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

Partie V

Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application :

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note :

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty .$$

V.1 Comparaison des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$

V.1.1 Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur l'espace E_1.

V.1.2 Montrer que :

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leq \|f\| .$$

V.1.3 Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

V.2 On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}.$$

V.2.1 Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

V.2.2 On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq \sqrt{n}\frac{\pi}{2}.$$

V.2.3 L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$?

V.2.4 L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|)$?

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1318 – D’après documents fournis