CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

Notations :

Pour ce problème, on désigne par :

- n un entier naturel non nul ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

- ${}^tA$ la matrice transposée de A ;
- $\det(A)$ le déterminant de A ;
- $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté :

$$x = (x_k)_{1\leq k\leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée :

$$A = ((a_{j,k}))_{1\leq j,k\leq n}$$

où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k.

– L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle x \mid y \rangle = {}^t x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est la norme euclidienne associée.

– La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

A toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la fonction $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_A(x) = \langle Ax \mid x \rangle.$$

Objectifs :

Dans la **partie I,** on étudie q_A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'on définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La suite du problème est consacrée à une étude des matrices de Hilbert définies par :

$$H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n},\ \text{où } a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}.$$

On étudie en particulier quelques propriétés du déterminant, des valeurs propres et de l'intervalle $[\min \operatorname{sp}(H_n), \max \operatorname{sp}(H_n)]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I

Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.1.1 Enoncer les propriétés de la sphère unité Ω_n ainsi que celles de la fonction q_A qui permettent d'affirmer que q_A est bornée sur Ω_n et qu'elle atteint ses bornes.
On note $m_A = \min(q_A(\Omega_n))$ et $M_A = \max(q_A(\Omega_n))$.

I.1.2 Démontrer que $\mathbb{R} \cap \operatorname{sp}(A) \subset [m_A, M_A]$.

I.1.3 Expliciter $\operatorname{sp}(A)$, m_A et M_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On pourra remarquer que $\Omega_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

I.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $q_A(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

I.2.1 Montrer que $q_A(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

I.2.2 Si $(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer $q_A(y+z)$ (qui est nul d'après **I.2.1.**) en fonction de $\langle Ay \mid z\rangle$ et $\langle Az \mid y\rangle$.

I.2.3 Montrer que la matrice A est anti-symétrique (c'est-à-dire que ${}^tA = -A$) (entre autre méthode, on pourra par exemple considérer les vecteurs y et z dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

I.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall x \in \Omega_n,\ q_A(x) = 0) \Leftrightarrow (A = (0)\ \text{(matrice nulle)})$$

I.4 Montrer que l'application $N : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ N(A) = \sup_{x\in\Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme.

I.5 Bornes de q_A sur Ω_n

On rappelle le théorème spectral : étant donnée une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A, alors u étant symétrique réel, il se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire : il existe n nombres réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \leq \lambda_n$ et une base orthonormée $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \cdots, n\} .$$

On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on conserve les notations de ce théorème dans les questions **I.5**.

I.5.1 Préciser $q_A(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

I.5.2 Soit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x'_k e_k \in \Omega_n$. Justifier les égalités $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = 1$, puis exprimer $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k de A et des composantes x'_k de x.

I.5.3 Retrouver le résultat obtenu en **I.1.1** : la fonction q_A possède un minimum m_A et un maximum M_A sur la sphère unité Ω_n.
Expliciter m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A.

I.5.4 Montrer que $N(A) = \sup\limits_{x\in\Omega_n} |q_A(x)| = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$. Etablir une inégalité entre $|\det(A)|$ et $(N(A))^n$.

I.5.5 Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, calculer $\det(A)$ et $N(A)$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par :

$$H_n = \left(\left(\frac{1}{j+k-1}\right)\right)_{1 \leq j,k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

ou encore $H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$ avec $a_{j,k} = \dfrac{1}{j+k-1}$.

Pour simplifier, on notera q_n la fonction $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_n(x) = q_{H_n}(x) = \langle H_n x \mid x \rangle$$

Partie II

Sur les valeurs propres de H_n.

II.1 Une expression de $q_n(x)$

$$\text{Soit : } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

II.1.1 Montrer que :

$$q_n(x) = \langle H_n x \mid x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{j+k-1} \right) x_j = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}.$$

II.1.2 Développer :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right)$$

où t est une variable réelle.

II.1.3 Montrer que :

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 dt.$$

II.1.4 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_n(x) \geq 0$$

et que $q_n(x) = 0$ équivaut à $x = 0$.

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de H_n ?

II.2 Une majoration de $q_n(x)$

II.2.1 Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\, dt = -i \int_0^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta$$

(on pourra expliciter $\int_{-1}^{1} t^k dt$ et $-i \int_0^{\pi} e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$).

II.2.2 En gardant les notations introduites en **II.1** et en notant :

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}$$

montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\, dt \leq \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$ (on pourra utiliser les résultats obtenus en **II.1** et **II.2.1**).

II.2.3 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq q_n(x) \leq \pi \left\| x \right\|^2$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$.

II.3 Application à $\mathrm{sp}(H_n)$

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$\mu_n = \min\left(\mathrm{sp}(H_n)\right) \text{ et } \rho_n = \max\left(\mathrm{sp}(H_n)\right).$$

II.3.1 Expliciter μ_2 et ρ_2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi.$$

II.3.2 Montrer que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$.
On pourra considérer des vecteurs propres orthogonaux e_1 et e_n tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$, $H_n e_n = \rho_n e_n$, $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$ et le vecteur $x = \sqrt{1-t} \cdot e_1 + \sqrt{t} \cdot e_n$ où $t \in [0,1]$.

II.3.3 Calculer $\langle H_n \varepsilon_n \mid \varepsilon_n \rangle$ où ε_n désigne le vecteur de base canonique :

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la limite de μ_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie III

Limite de $(N(H_n))_{n\geq 2}$ grâce à une intégrale double

Dans cette partie, on utilise la relation :

$$\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et on suppose $n \geq 2$.

III.1 Deux intégrales doubles

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$D_n = [1,n] \times [1,n]\,,\ \Gamma_n = \left[1, \sqrt{n}\right] \times \left[1, \sqrt{n}\right]$$

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{xy}\,(x+y-1)} \text{ et } J_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{dudv}{u^2+v^2}.$$

III.1.1 En utilisant le changement de variable $(x,y) = (u^2, v^2)$, montrer que :

$$I_n \geq 4J_n.$$

III.1.2 On note :

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x} dx \text{ et } L_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx.$$

Montrer que $J_n = K_n - L_n$.

III.2 Un équivalent de J_n

III.2.1 En majorant $\arctan(t)$, montrer que :

$$0 < L_n \leq 1.$$

III.2.2 Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

Montrer que $K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4} \ln(n)$.

III.2.3 En déduire que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4} \ln(n)$.

III.3 Limite de $N(H_n)$. On utilise les notations et les résultats de la **partie II.**

On note a l'élément de $\mathbb{R}^n$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

III.3.1 Montrer que $\|a\|^2 \leq 1 + \ln(n)$.

III.3.2 Montrer que $4J_n \leq q_n(a)$.

III.3.3 En déduire la limite de $N(H_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie IV

Sur le déterminant de H_n

H_n désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre n, pour $n \geq 2$.

IV.1 Une fraction rationnelle

On considère la fraction rationnelle $R_n(x) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-k)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$.

On admettra qu'il existe des réels $\lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, \cdots, \lambda_{n,n}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \cdots, -n\},\ R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{k,n}}{(x+k)}$$

cette décomposition (en éléments simples) de R_n étant unique.

Exprimer le coefficient $\lambda_{n,n}$ de $\dfrac{1}{x+n}$ à l'aide de $(2n)!$ et de $n!$

IV.2 Matrice A_n

Pour $n \geq 2$, on considère la matrice A_n définie par $A_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$ avec :

$$a_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1}{j+k-1} \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n \\ R_{n-1}(j) \text{ pour } k = n,\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

où $R_{n-1}(x) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(x-k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}$.

IV.2.1 Montrer que, pour tout i compris entre 1 et n, on a :

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j},$$

puis en déduire que $\det(A_n) = \dbinom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$.

IV.2.2 Montrer que $\det(A_n) = \dfrac{\det(H_{n-1})}{(2n-1)\dbinom{2(n-1)}{n-1}}$.

En déduire l'expression de $\det(H_n)$ en fonction de $\det(H_{n-1})$.

IV.2.3 Montrer, pour tout $n \geq 2$, que $\det(H_n) \neq 0$, puis que $\dfrac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

IV.3 Calcul de $\det(H_n)$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n = \prod_{k=1}^{n} k!$ montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1170 – D'après documents fournis