

**Espaces à noyau reproduisant**

Les espaces à noyau reproduisant ont des applications dans divers domaines comme l'apprentissage statistique ou la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Ce problème présente en partie III quelques exemples d'espaces à noyau reproduisant, l'un de ces exemples étant obtenu à partir de l'étude préalable dans la partie II d'un opérateur intégral. La partie IV propose quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant.

L'attention du candidat est attirée sur le fait que l'espace préhilbertien étudié *n'est pas le même* dans les différentes parties du problème.

Définitions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On dit que E est un *espace à noyau reproduisant* sur I lorsqu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. l'espace E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ;
2. pour tout $x \in I$, l'application $V_x : (E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $V_x(f) = f(x)$ est continue ;
3. pour tout $x \in I$, il existe une application $k_x \in E$ vérifiant,

$$\forall f \in E, \quad f(x) = \langle k_x, f \rangle.$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application K définie par

$$\forall (x, t) \in I^2, \quad K(x, t) = k_x(t).$$

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[x_{i-1}, x_i]$.

I Préliminaires

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, de norme associée $\|\cdot\|$. Soit u un endomorphisme de E vérifiant,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

- Q 1.** Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que l'orthogonal F^\perp de F est stable par u .
On suppose qu'il existe un vecteur unitaire $x_0 \in F$ vérifiant

$$\langle u(x_0), x_0 \rangle = \sup_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle.$$

Pour tout vecteur unitaire $y \in F$ orthogonal à x_0 , on pose, pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= x_0 \cos t + y \sin t, \\ \varphi(t) &= \langle u \circ \gamma(t), \gamma(t) \rangle. \end{aligned}$$

- Q 2.** Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 .
Q 3. Calculer $\|\gamma(t)\|$ puis justifier que $\varphi'(0) = 0$.
Q 4. En déduire que $u(x_0)$ est orthogonal à y .
Q 5. Montrer que x_0 est vecteur propre de u .

II Étude d'un opérateur

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, muni du produit scalaire défini par,

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tout $s \in [0, 1]$, on définit la fonction k_s par,

$$\forall t \in [0, 1], \quad k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s, \\ s(1-t) & \text{si } t \geq s. \end{cases}$$

On note également, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, $K(s, t) = k_s(t)$.

Q 6. Soit $s \in]0, 1[$. Tracer la courbe représentative de k_s sur $[0, 1]$.

Q 7. Montrer que K est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall s \in [0, 1], \quad T(f)(s) = \int_0^1 k_s(t)f(t) dt.$$

Q 8. Montrer que T est un endomorphisme continu de E .

Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_k la fonction définie par $p_k(x) = x^k$.

Q 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $T(p_k)$. En déduire que F est stable par T .

Q 10. En déduire $(T(p))''$ pour tout $p \in F$.

Q 11. Soit $f \in E$. Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$.

Q 12. Pour tout $f \in E$, montrer que $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 puis que $T(f)'' = -f$.

Q 13. Montrer que T est injectif.

Q 14. Déterminer l'image de T .

Q 15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associé. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$.

Q 16. Déterminer les valeurs propres de T et montrer que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$. On note $G = \text{Vect}((g_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$ et $H = G^\perp$.

Q 17. Justifier que, pour tout $(f, g) \in E^2$, on a

$$\langle T(f), g \rangle = \langle f, T(g) \rangle$$

On pourra utiliser la question 12.

On admet que,

$$H \neq \{0\} \implies \exists f \in H \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1, \\ \langle T(f), f \rangle = \sup_{h \in H, \|h\|=1} \langle T(h), h \rangle. \end{cases}$$

Q 18. En déduire que $H = \{0\}$.

Q 19. Montrer que la famille de vecteurs $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

On admet pour la suite que $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite totale.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall x \in [0, 1], \quad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} \langle f, g_k \rangle g_k(x).$$

Q 20. Montrer que Φ est continue.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $f_N = \sum_{k=1}^N \langle f, g_k \rangle g_k$.

Q 21. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = 0.$$

Q 22. En déduire $T(f) = \Phi$.

III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie, E_1 désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

III.A – Un exemple

Q 23. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E_1 en posant

$$\forall (f, g) \in (E_1)^2, \quad (f | g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

Dans la suite de cette partie, on désigne par N la norme associée à ce produit scalaire.

Q 24. Montrer que, pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 0$, on a

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f(x)| \leq \sqrt{x \int_0^x (f'(t))^2 dt}.$$

On pose, pour tout $f \in E_1$,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k'_s(t)f'(t) dt,$$

où k_s a été défini dans la partie précédente.

Q 25. Soit $f \in E_1$ de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que $U(f) = -T(f'')$. En déduire que $U(f) = f$.

Q 26. Montrer que U est l'application identité de E_1 .

Q 27. Démontrer que l'espace préhilbertien $(E_1, (\cdot | \cdot))$ est un espace à noyau reproduisant et que son noyau reproduisant est l'application K définie dans la partie précédente.

III.B – Un contre-exemple

On considère à nouveau l'espace E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Q 28. Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n'est pas un espace à noyau reproduisant.

III.C – Fonctions développables en série entière

Q 29. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série $\sum (a_n)^2$ soit convergente.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

Dans la suite de cette sous-partie, on considère l'ensemble E_2 des fonctions de $] -1, 1[$ dans \mathbb{R} de la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum (a_n)^2$ convergente. Pour $f, g \in E_2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \quad \text{où } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

Q 30. Montrer que E_2 muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien réel.

Q 31. Soit $x \in] -1, 1[$. Déterminer $g_x \in E_2$ tel que, pour tout $f \in E_2$,

$$f(x) = \langle g_x, f \rangle$$

Q 32. En déduire que E_2 est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.

III.D – Autre exemple parmi les fonctions de classe \mathcal{C}^1 par morceaux

On se donne dans cette sous-partie un réel $a > 0$.

On considère l'espace E_3 des fonctions $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[0, a]$, et vérifiant $f(0) = 0$. On munit E_3 du produit scalaire défini, pour $f, g \in E_3$, par

$$(f | g) = \int_0^a f'(t)g'(t) dt.$$

Q 33. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ est un noyau reproduisant sur $(E_3, (\cdot | \cdot))$.

Soit E_4 l'espace des fonctions continues sur $[0, a]$, à valeurs dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et vérifiant de plus $f(a) = 0$. Soit $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $\varphi(a) = 0$ et, pour tout $x \in [0, a]$, $\varphi'(x) < 0$.

Q 34. Déterminer un produit scalaire sur E_4 tel que la fonction $(x, y) \mapsto \min(\varphi(x), \varphi(y))$ soit un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien E_4 .

IV Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

IV.A – Continuité

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace à noyau reproduisant sur un intervalle I , de noyau reproduisant K . Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose $k_x(y) = K(x, y)$.

Soit $x \in I$ et V_x définie sur E par $V_x(f) = f(x)$. On pose

$$N(V_x) = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Q 35. Démontrer que

$$N(V_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}.$$

On suppose que K est continue sur $I \times I$.

Q 36. Démontrer que toutes les fonctions de E sont continues.

IV.B – Construction d'un espace à noyau reproduisant

On note ici E l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On considère une fonction $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On s'intéresse à l'application $T : E \rightarrow E$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt.$$

On suppose que $\ker T$ est de dimension finie.

Q 37. Justifier que T induit un isomorphisme de $(\ker T)^\perp$ sur $\text{Im } T$.

On note désormais S la bijection réciproque de cet isomorphisme.

On définit le produit scalaire φ sur $\text{Im } T$ en posant, pour tout $(f, g) \in (\text{Im } T)^2$,

$$\varphi(f, g) = \langle S(f), S(g) \rangle$$

On considère l'application K définie sur $[0, 1]^2$ par

$$K(x, y) = \int_0^1 A(x, t)A(y, t) dt$$

Q 38. Montrer que $(\text{Im } T, \varphi)$ est un espace à noyau reproduisant, de noyau K .

• • • FIN • • •
