Mathématiques 1

PSI

2011

4 heures Calculatrices autorisées

Le but de ce problème est d'établir ***partie V*** une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler, puis d'en présenter ***partie VI*** une application à la distribution de Bolzmann dans un gaz de particules.

I La fonction Gamma

On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

I.A – Montrer que la fonction $t \to e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

I.B – Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

I.C – Exprimer $\Gamma(x + 1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

I.D – Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$.

II Formule de Stirling

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose :

$$u_k = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt$$

II.A – À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \frac{1}{2}\left(\ln k - \ln(k-1)\right) - \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

II.B – Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note :

$$w_k = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} w_k$.

En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + v_n$$

où $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

II.C – En utilisant encore une intégration par parties, montrer que :

$$\left| w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

II.D – En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

puis que :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite on admettra que $a = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{III.1}$$

On désigne par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(J_n(x))_{n\geqslant 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$$

III.A – Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.B – Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C – Montrer que, pour tout entier n, $n \geqslant 0$,

$$\forall x > 0, \qquad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D – En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

III.E – Établir l'identité d'Euler (**III.1**).

IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u - [u] - 1/2 \end{aligned}$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u.

IV.A – Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1,1]$.

IV.B – Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

IV.D – L'application $u \longmapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

IV.E – Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

En reprenant l'intégration par parties de la **question IV.C**, démontrer que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$

V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

où h est l'application définie à la **partie IV**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel n, on définit $F_n(x)$ par :

$$F_n(x) = \ln \left(\frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} \right)$$

V.A – Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t \, dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du$$

V.B – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1)\ln n - \left(x + n + \frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x$$

V.C –

V.C.1) En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}$$

V.C.2) En déduire que :

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

V.D – Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

VI Distribution de Bolzmann

VI.A – Soient ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 quatre nombres réels strictement positifs deux à deux distincts et deux nombres réels strictement positifs E et N. Soit Ω la partie, supposée non vide, formée des quadruplets $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 = E \end{cases}$$

VI.A.1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^4$.

Montrer que f admet un maximum sur Ω.

On note alors $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$ un point en lequel ce maximum est atteint.

VI.A.2) Montrer que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ alors x_3 et x_4 peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_3 &= u x_1 + v x_2 + w \\ x_4 &= u' x_1 + v' x_2 + w' \end{aligned}$$

où l'on donnera explicitement u, v, u', v' en fonction de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

VI.A.3) En supposant qu'aucun des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 n'est nul, déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0 \end{aligned}$$

VI.A.4) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,0,u,u')$ et $(0,1,v,v')$ admet un sous-espace supplémentaire orthogonal engendré par les vecteurs $(1,1,1,1)$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$.

VI.A.5) En déduire l'existence de deux réels α, β tels que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta\varepsilon_i$$

VI.B – On définit la fonction F pour tout $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ par

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\sum_{i=1}^{4} \ln\Gamma(1+x_i)$$

On suppose qu'il existe $\overline{N} = (N_1,N_2,N_3,N_4) \in \Omega$, les nombres N_1,N_2,N_3,N_4 étant tous les quatre non nuls, tel que

$$\max_{x\in\Omega} F(x) = F(\overline{N})$$

Montrer l'existence de deux nombres réels λ et μ vérifiant pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$:

$$\ln N_i + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+N_i)^2}\,du = \lambda + \mu\varepsilon_i$$

VI.C – Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, on pose

$$\theta(N_i) = \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+N_i)^2}\,du$$

VI.C.1) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

VI.C.2) Montrer l'existence d'un réel K strictement positif tel que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$

$$N_i = Ke^{\mu\varepsilon_i}e^{-\theta(N_i)}$$

Commentaire

Les calculs précédents interviennent dans la modélisation de gaz de particules : $\epsilon_1,\dots,\epsilon_4$ correspondent à quatre niveaux différents d'énergies et $N_1,\dots,N_4$ aux nombres de particules qui se trouvent respectivement au niveau $\epsilon_1,\dots,\epsilon_4$ (pour un total de N particules et une énergie totale E). Sous réserve d'équiprobabilité des répartitions, la probabilité d'être dans la configuration (x_1,x_2,x_3,x_4) est donnée par $N!/(N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!)$.

En mécanique statistique, on pose comme principe que les particules vont se répartir de manière à ce que cette probabilité soit maximale. Cela revient à chercher la répartition qui maximise la somme $-\sum_{i=1}^{4}\ln(N_i!)$, assujettie aux conditions de **VI.A**. *Il découle alors du dernier résultat établi dans le problème, la* **loi de répartition de Bolzmann**, *à savoir que pour tous j, k, $j \neq k$, si N_j et N_k sont assez grands : $N_j/N_k \simeq e^{\mu(\varepsilon_j-\varepsilon_k)}$. D'autre part, un calcul utilisant conjointement la formule de Bolzmann donnant l'expression statistique de l'entropie $S = -k_B\ln(N!/(N_1!\cdots N_4!))$ et la relation $dS = dE/T$ (pour une transformation à volume constant) permet d'établir que $\mu = -1/k_BT$.*

• • • FIN • • •
