Mathématiques 1

TSI **2013**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Soit n un entier naturel non nul. Le but de ce problème est d'étudier les solutions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, de l'équation différentielle d'ordre n

$$\mathcal{E}_n : y^{(n)} - y = 0$$

L'exposant entre parenthèses indique un ordre de dérivation ; par exemple, pour $n = 2$ on obtient l'équation différentielle $\mathcal{E}_2 : y'' - y = 0$.

Les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont, par définition, les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : $\forall t \in \mathbb{R},\ y^{(n)}(t) - y(t) = 0$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_n$, *à valeurs complexes* tandis que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des solutions *à valeurs réelles*.

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une série entière de rayon de convergence infini telle que f coïncide, sur $\mathbb{R}$, avec la somme de cette série entière.

I Cas $n = 1$ et méthode d'Euler

I.A – La méthode d'Euler

Pour cette **sous-partie I.A** on considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution que l'on va chercher à approximer sur $[0, 1]$. Soit N un entier naturel non nul et fixé jusqu'à la **question I.C.3**. On pose $\tilde{y}_0 = 1$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \frac{1}{N} f(\tilde{y}_k) \tag{I.1}$$

La *méthode d'Euler*, que nous allons étudier, consiste à construire une approximation de y, affine par morceaux sur $[0, 1]$ et valant $\tilde{y}_k$ au temps k/N.

I.A.1) Rappeler brièvement l'idée menant à la définition (**I.1**).

I.A.2) En supposant f connue, écrire une procédure Maple ou Mathématica qui à N associe les éléments de la suite $(\tilde{y}_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$.

I.B – Préliminaires au I.C

Désormais nous allons nous concentrer sur un problème de Cauchy associé à $\mathcal{E}_1$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons vérifier que la suite des approximations donnée par la méthode d'Euler converge, dans un sens à préciser, vers la solution de $\mathcal{C}$ sur $[0, 1]$.

I.B.1) Justifier sans calculs que $\mathcal{C}$ a une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer explicitement cette solution y.

I.B.2) La notation $E[t]$ désignant la partie entière entière d'un réel t, prouver que

$$\frac{E[t]}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

I.C – Mise en œuvre de la méthode d'Euler pour $\mathcal{E}_1$

On souhaite approximer la solution y du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ par la méthode d'Euler. On définit donc $\tilde{y}_0 = 1$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$\tilde{y}_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \tilde{y}_k$$

I.C.1) Expliquer rapidement le lien entre la définition ci-dessus et la démarche du **I.A**.

I.C.2) Exprimer simplement $\tilde{y}_k$ en fonction de k et N pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

I.C.3) On définit l'application $y_N : [0,1] \to \mathbb{R}$ suivante

- pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $y_N\left(\dfrac{k}{N}\right) = \tilde{y}_k$;
- pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y_N est une fonction polynôme de degré au plus 1 sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}\right]$.

a) Dans un repère tel que l'axe des x décrit $[0,1]$, celui des y décrit $[0,3]$, dessiner les graphes de la solution y de $\mathcal{C}$ et des fonctions y_2, y_3.

b) Prouver que pour tout $t \in \left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}\right]$ on a

$$y_N(t) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \left(t + 1 - \frac{k}{N}\right)$$

c) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$

$$y_N(t) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{E[Nt]} \left(t + 1 - \frac{E[Nt]}{N}\right)$$

I.C.4) Prouver que

$$\forall t \in [0,1] \qquad y_N(t) \xrightarrow[N \to +\infty]{} y(t)$$

où y désigne la solution de $\mathcal{C}$: on dit que la suite des approximations $(y_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ *converge simplement* vers la solution réelle du problème.

I.D – Étude d'un cas particulier avec second membre

Dans cette partie seulement, on travaille avec un second membre non nul.

I.D.1) Déterminer l'unique solution h du système

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) - h(t) = \exp(-t)\,(\cos t - 2\sin t) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

I.D.2) Montrer que h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et calculer les coefficients de ce développement en fonction des $b_n = \sin\left(\dfrac{3n\pi}{4}\right)$.

I.D.3) Tracer rapidement la représentation graphique de h sur $[0, 2\pi]$.

I.D.4) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer I, en détaillant les calculs.

II Généralités

II.A – Quelques propriétés qualitatives des solutions de $\mathcal{E}_n$

Ici $n \geqslant 1$ est un entier quelconque.

II.A.1) Si $n = 2$, donner les solutions réelles, puis complexes de $\mathcal{E}_2 : y'' - y = 0$.

On rappelle que, dans le cas général, il n'existe pas de méthode au programme permettant de résoudre simplement l'équation $\mathcal{E}_n$; l'utilisation de l'équation caractéristique associée est, en particulier, à proscrire.

II.A.2) Montrer que toute solution y de $\mathcal{E}_n : y^{(n)} - y = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.A.3) Montrer que si y est solution de $\mathcal{E}_n$ alors y' est solution de $\mathcal{E}_n$.

II.A.4) La connaissance de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ implique celle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Prouver que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
- y est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;
- y est la partie réelle d'une fonction $\tilde{y} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

II.B – Structure de l'ensemble des solutions

II.B.1) Prouver que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, muni des lois usuelles sur les applications, a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II.B.2) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞. On pose pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

définissant ainsi une application $t \mapsto Y(t)$ qui est C^∞ de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n, ensemble identifié à $\mathbb{R}^n$.

Montrer que l'on a $y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $t \mapsto Y(t)$ est solution d'un système différentiel

$$Y' = AY$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, dont on explicitera les coefficients.

II.B.3) Montrer que l'application

$$\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto & \big(y(0), y'(0), y''(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

En déduire que $\mathcal{S}_n(K)$ est un K-espace vectoriel de dimension n pour $K = \mathbb{R}$. On admettra qu'il en va de même pour $K = \mathbb{C}$.

III Les cas $n = 3$ et $n = 4$

III.A – Le cas $n = 3$: méthode de la variation de la constante

Dans cette partie, on fixe $n = 3$ de sorte que l'on étudie $\mathcal{E}_3 : y''' - y = 0$.

III.A.1) Montrer que la fonction exponentielle $t \mapsto \exp(t)$ est une solution de $\mathcal{E}_3$ sur $\mathbb{R}$.

III.A.2) Pour toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ on note $z : t \mapsto y(t)\exp(-t)$ qui est aussi de classe C^∞.

Prouver que $\mathcal{E}_3$ est équivalente à $\mathcal{E}' : z''' + 3(z'' + z') = 0$.

III.A.3) Donner les solutions à valeurs complexes, puis réelles de $\mathcal{E}'$.

On pourra poser $Z = z'$.

III.A.4) En déduire les solutions à valeurs complexes, puis réelles de $\mathcal{E}_3$.

Existe-t-il une solution réelle, 2π-périodique et non nulle ?

III.B – Le cas $n = 4$: recherche de séries entières solutions

Dans cette partie, on fixe $n = 4$ de sorte que l'on étudie $\mathcal{E}_4 : y^{(4)} - y = 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit

$$A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} \qquad B(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} \qquad C(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} \qquad D(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

III.B.1) Déterminer le domaine de définition de ces séries entières et reconnaître, en justifiant, les dérivées B', C' et D'.

III.B.2) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\sigma_k = 1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k$.

a) Montrer que : k impair $\Rightarrow \sigma_k = 0$.

b) En déduire que σ_k est non nul si et seulement si k est un multiple de 4.

c) Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$A(t) = \frac{1}{4}\left(\exp(t) + \exp(-t) + \exp(it) + \exp(-it)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} t + \cos t\right)$$

d) Donner des expressions analogues pour $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$.

III.B.3) Soit $y \in \mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$, de développement noté

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

Donner une relation de récurrence reliant a_{k+4} et a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = a_0 A(t) + a_1 B(t) + 2a_2 C(t) + 6a_3 D(t)$$

puis qu'il existe $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = z_1 \operatorname{ch}(t) + z_2 \operatorname{sh}(t) + z_3 \cos(t) + z_4 \sin(t)$$

III.B.4) Montrer, à l'aide de la **question II.B.3**, que $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \cos, \sin)$ est une base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ puis en déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

III.B.5) Montrer que les solutions de $\mathcal{E}_4$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner le développement en série entière de la solution de $\mathcal{E}_4$ vérifiant

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = -y'''(0) = 1$$

IV Retour au cas général

Ici, $n \geqslant 1$ est un entier quelconque. On étudie donc l'équation $\mathcal{E}_n : y^{(n)} - y = 0$.

IV.A – Expression des solutions dans le cas général

IV.A.1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et

$$y_k : t \mapsto \exp\left(\omega^k t\right)$$

Prouver que : $\forall k \in \mathbb{Z},\ y_k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

IV.A.2) Prouver que la famille d'applications $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre.

IV.A.3) Donner une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, en déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

IV.A.4) Justifier que toutes les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

IV.B – Étude des solutions 2-périodiques de $\mathcal{E}_n$

On étudie ici la possibilité de solutions 2π-périodiques, à valeurs réelles pour $\mathcal{E}_n$. Soit y une telle solution de $\mathcal{E}_n$.

IV.B.1) Soit $k \in \mathbb{N}$. On notera par $a_k(f)$ et $b_k(f)$ les coefficients de Fourier usuels d'une fonction f, 2π-périodique, avec la convention $b_0(f) = 0$.

Prouver, pour tout entier naturel k, les relations

$$\begin{cases} a_k(y') = k b_k(y) \\ b_k(y') = -k a_k(y) \end{cases}$$

IV.B.2) On pose $c_0(y) = a_0(y)$ et

$$\forall k \geqslant 1, \qquad \begin{cases} c_k(y) = \dfrac{1}{2}(a_k(y) - i b_k(y)) \\ c_{-k}(y) = \dfrac{1}{2}(a_k(y) + i b_k(y)) \end{cases}$$

Prouver que $c_k(y') = ikc_k(y)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en déduire que tous les $c_k(y)$ sont nuls dans le cas où n est impair.

IV.B.3) Rappeler le théorème de Dirichlet (hypothèses, conclusion).

L'utiliser pour prouver l'assertion : si n est impair alors l'unique solution 2π-périodique à valeurs réelles de $\mathcal{E}_n$ est la fonction nulle.

Que dire si n est pair ?

• • • FIN • • •