# Mathématiques 2

**TSI**

**2014**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Le but du problème (qui date du XVI$^{\text{e}}$ siècle) apparaît dans la partie IV.

On note $(\vec{e}_1, .., \vec{e}_6)$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$. Pour $k$ de 1 à 6, on note $E_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ engendré par les cinq vecteurs de la base autres que $\vec{e}_k$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Quand on parlera des coordonnées d'un vecteur, il s'agira toujours des coordonnées sur la base canonique.

On définit ainsi trois vecteurs par leurs coordonnées

$$\vec{a} = (8,0,0,5,0,3) \qquad \vec{b} = (4,4,4,1,0,3) \quad \text{et} \quad \vec{c} = (1,7,4,1,3,0)$$

## I Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^6$

Soit $f$ l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^6$ dans lui-même vérifiant

$$\begin{cases} f(\vec{e}_5) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_6 & \\ f(\vec{e}_q) = \vec{e}_q & \text{pour } q = 1,2,3,4,6 \end{cases}$$

***I.A*** –

**I.A.1)** Représenter la matrice $M$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$.

**I.A.2)** Donner la valeur du déterminant de $M$.

**I.A.3)** Montrer que le rang de $M$ est inférieur ou égal à 5.

**I.A.4)** Montrer que l'image de $f$ contient tous les vecteurs de $E_5$.

**I.A.5)** Pour $k$ quelconque entre 1 et 6, quelle est la dimension de $E_k$ ?

**I.A.6)** Montrer que l'image de $f$ est $E_5$ et que le noyau de $f$ est de dimension 1.

***I.B*** – Trouver un vecteur $\vec{u}$ dirigeant le noyau de $f$, ayant des coordonnées simples.

***I.C*** –

**I.C.1)** Former le polynôme caractéristique de $M$.

**I.C.2)** Quelles sont les valeurs propres de $M$ ? Quels sont leurs ordres de multiplicité ?

**I.C.3)** Justifier que les sous-espaces propres de $f$ sont $\ker(f)$ et $E_5$.

**I.C.4)** Montrer que $f$ est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^6$ sur laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

***I.D*** –

**I.D.1)** Montrer que l'application linéaire $f$ est le projecteur sur le sous-espace vectoriel $E_5$ parallèlement à la droite dirigée par $\vec{u}$.

**I.D.2)** Ce projecteur est-il un projecteur orthogonal ?

**I.D.3)** Exprimer $M^2$ en fonction de $M$.

***I.E*** – On considère l'équation $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où le vecteur $\vec{x}$ est l'inconnue.

**I.E.1)** Montrer que $\vec{b}$ lui-même est une solution particulière de l'équation.

**I.E.2)** Montrer que la solution générale est le vecteur $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{u}$, où le réel $\lambda$ est arbitraire.

**I.E.3)** Montrer que le vecteur $\vec{c}$ est la seule solution de l'équation différente de $\vec{b}$ et dont une coordonnée est nulle, les autres coordonnées étant positives ou nulles.

# II Solutions approchées

Que $R$ soit une matrice carrée ou un vecteur colonne, on note ${}^tR$ sa matrice transposée.

On rappelle que les deux vecteurs colonnes $V$ et $W$ sont orthogonaux dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^6$ si et seulement si le produit matriciel ${}^tV \cdot W$ est nul.

On donne une matrice carrée $A$ et un vecteur colonne $Y_0$ de $\mathbb{R}^6$, et on considère l'équation matricielle $A \cdot X = Y_0$ où l'inconnue est le vecteur colonne $X$ de $\mathbb{R}^6$. On suppose que cette équation n'a pas de solution et on lui associe l'équation ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

***II.A*** – On va d'abord montrer que cette dernière équation a des solutions.

**II.A.1)** Montrer que ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ si et seulement si le vecteur $A \cdot X - Y_0$ est orthogonal à tout vecteur de la forme $A \cdot Z$, où $Z$ est un vecteur colonne $Z$ de $\mathbb{R}^6$.

**II.A.2)** En déduire que ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ si et seulement si $A \cdot X$ est la projection orthogonale de $Y_0$ sur l'image de $A$.

**II.A.3)** Montrer qu'un tel vecteur $X$ existe.

***II.B*** – ***Résolution de l'équation*** ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$

On pose $B = {}^tA \cdot A$. On suppose que $B$ est de rang 5.

**II.B.1)** Montrer que $B$ est une matrice symétrique.

**II.B.2)** Soit $\lambda$ une valeur propre de $B$ et $X$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons le produit matriciel ${}^tX \cdot B \cdot X$, montrer que $\lambda$ est un réel positif.

**II.B.3)** Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $B = {}^tP \cdot D \cdot P$, les cinq premiers termes diagonaux de $D$ étant strictement positifs et le dernier étant nul.

**II.B.4)** Connaissant $P$ et $D$, montrer que la résolution de ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ se ramène à un système de cinq équations à cinq inconnues dont la résolution est immédiate.

***II.C*** – Soit $X_0$ une solution de l'équation ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

Rappelons que $Y_0 = A \cdot X$ n'a pas de solution, donc que $Y_0$ n'est pas dans l'image de $A$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des vecteurs $X$ de $\mathbb{R}^6$ tels que la distance de $A \cdot X$ à $Y_0$ soit minimale au sens des moindres carrés.

Montrer que $X_0$ appartient à $\mathcal{P}$.

$X_0$ peut donc être vu comme une solution approchée de l'équation $Y_0 = A \cdot X$

# III Applications linéaires et manipulations de cruches

Un voyageur dispose de trois cruches $C_1$, $C_2$, $C_3$ contenant chacune de l'eau et de l'air (car le remplissage des cruches est partiel).

À chaque répartition de l'eau dans les trois cruches on associe un vecteur de $\mathbb{R}^6$, $\vec{x} = (x_1, .., x_6)$, où $x_1$, $x_3$, $x_5$ désignent les volumes d'eau respectivement dans $C_1$, $C_2$, $C_3$ et où $x_2$, $x_4$, $x_6$ sont les volumes d'air correspondants.

Face à une telle répartition, le voyageur s'autorise l'une des deux manipulations suivantes :

Choisir deux cruches $C_i$ et $C_j$, verser l'eau de $C_i$ dans $C_j$ (sans déborder) et s'arrêter

- lorsque $C_i$ est vide : manipulation $v(i, j)$ qui peut se lire « vider $C_i$ dans $C_j$ »,
- lorsque $C_j$ est pleine : manipulation $p(i, j)$ qui peut se lire « remplir $C_j$ avec $C_i$ ».

***III.A*** – Dans cette question seulement, on note $\vec{y}$ l'image de $\vec{x}$ par l'application $f$ définie dans la partie I.

**III.A.1)** Calculer, en utilisant la matrice $M$ de $f$, les coordonnées $(y_1, y_2, ..., y_6)$ de $\vec{y}$.

**III.A.2)** Face à la répartition associée à $\vec{x}$, le voyageur applique la manipulation $v(3, 1)$ (si elle est possible). Vérifier que le vecteur $\vec{y}$ est le vecteur associé aux volumes d'eau et d'air après cette manipulation.

***III.B*** – Dans toute la suite de cette partie, $i$ et $j$ sont deux entiers différents, compris entre 1 et 3. On désigne par $\vec{x} = (x_1, ..., x_6)$ et $\vec{y} = (y_1, ..., y_6)$ les vecteurs associés à la répartition de l'eau et de l'air avant et après l'utilisation d'une certaine manipulation.

**III.B.1)** Montrer que, si cette manipulation est $v(i, j)$, alors on a :

$$\begin{cases} y_{2i-1} = 0 \\ y_{2i} = x_{2i} + x_{2i-1} \\ y_{2j-1} = x_{2j-1} + x_{2i-1} \\ y_{2j} = x_{2j} - x_{2i-1} \\ y_k = x_k & \text{pour } k \text{ différent de } 2i,\ 2j,\ 2i-1 \text{ et } 2j-1 \end{cases}$$

 

On note alors $V_{i,j}$ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ tel que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^6, \vec{y} = V_{i,j}(\vec{x})$. En particulier, $V_{3,1}$ est l'application notée $f$ dans la partie I.

**III.B.2)** Donner de même, sans justification, les composantes de $\vec{y}$ en fonction de celles de $\vec{x}$ lorsque la manipulation utilisée est $p(i,j)$. (On remarquera que déplacer de l'eau de $C_i$ vers $C_j$ équivaut à déplacer de l'air de $C_j$ vers $C_i$). On constatera que $y_{2j} = 0$. On note alors $P_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ qui transforme $\vec{x}$ en $\vec{y}$.

***III.C*** – Soit $k$ un entier entre 1 et 6.

**III.C.1)** Justifier que $E_k$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^6$.

**III.C.2)** Donner une équation simple de cet hyperplan.

***III.D*** – On fixe le couple $(i,j)$.

**III.D.1)** Montrer que tous les vecteurs de $E_{2i-1}$ sont invariants par $V_{i,j}$.

**III.D.2)** Montrer que tous les vecteurs de $E_{2j}$ sont invariants par $P_{i,j}$.

**III.D.3)** On note $M_{i,j}$ la matrice de l'application $V_{i,j}$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^6$.

Montrer que la matrice $M_{i,j}$ comporte une ligne de zéros, dont on donnera la position.

**III.D.4)** En s'inspirant de la partie I, montrer que toutes les applications $V_{i,j}$ et $P_{i,j}$ sont de rang 5 et sont diagonalisables.

# IV Le problème des trois cruches

On considère trois cruches, $C_1$, $C_2$ et $C_3$ de capacités respectives, 8, 5 et 3 litres. Initialement $C_1$ est pleine d'eau et $C_2$ et $C_3$ sont vides (pleines d'air). Le voyageur voudrait, par une succession des manipulations permises, faire en sorte que l'eau soit répartie en parts égales dans $C_1$ et $C_2$.

Les notations de la partie III pour caractériser la répartition de l'eau dans les cruches à l'aide d'un vecteur de $\mathbb{R}^6$ sont reprises dans cette partie.

***IV.A*** –

**IV.A.1)** Montrer que les deux vecteurs de $\mathbb{R}^6$ associés respectivement à l'état initial des cruches et à l'état final souhaité sont les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définis dans le préambule.

**IV.A.2)** Montrer, en utilisant par exemple la dernière question de la partie I, qu'on peut passer par une seule manipulation de l'état associé au vecteur $\vec{c}$ du préambule à l'état final souhaité.

**IV.A.3)** Montrer, en utilisant par exemple III.B. que, si le problème a une solution, les vecteurs de $\mathbb{R}^6$ associés aux états intermédiaires (entre l'état initial et l'état final) ont tous une coordonnée nulle (au moins). On appelle dans la suite « vecteur privilégié » tout vecteur de $\mathbb{R}^6$ ayant une coordonnée nulle, les autres étant strictement positives.

***IV.B*** – On peut résoudre les questions suivantes en raisonnant sur l'état des cruches, sans revenir aux applications linéaires.

**IV.B.1)** On pose $\vec{d} = (1,7,5,0,2,1)$.

Montrer que $\vec{d}$ est, en dehors de $\vec{b}$, le seul vecteur privilégié qu'on puisse obtenir à partir de $\vec{c}$ par une seule manipulation.

**IV.B.2)** Montrer qu'on peut repasser de l'état associé à $\vec{d}$ à l'état associé à $\vec{c}$ par une seule manipulation.

***IV.C*** – On constate qu'on peut passer de l'état associé à $\vec{d}$ à l'état associé à $\vec{e} = (6,2,0,5,2,1)$ (ou inversement), puis de même, de $\vec{e}$ à $\vec{f} = (6,2,2,3,0,3)$, de $\vec{f}$ à $\vec{g} = (3,5,2,3,3,0)$ et de $\vec{g}$ à $\vec{h} = (3,5,5,0,0,3)$, qui n'est pas privilégié.

Montrer qu'il est possible de passer de l'état initial (associé à $\vec{a}$) à l'état associé à $\vec{h}$ en utilisant une seule manipulation.

***IV.D*** – Décrire, pour résumer, les manipulations successives qui permettent au voyageur d'atteindre son but.

***IV.E*** – Partant de la même répartition initiale d'eau dans les cruches (8 litres, 0 litre, 0 litre),

**IV.E.1)** Est-il possible d'arriver à une répartition de l'eau en parts égales entre les trois cruches ?

**IV.E.2)** Est-il possible d'arriver à la répartition (4 litres, 2 litres, 2 litres) ?

***IV.F*** – Rappelons que les capacités des cruches sont 8, 5 et 3 litres.

**IV.F.1)** Donner les composantes $y_1, \dots, y_6$ du vecteur colonne $Y_0$ associé à la répartition des 8 litres d'eau en trois quantités égales dans les trois cruches (répartition qu'on ne peut obtenir si l'on s'en tient aux manipulations permises).

**IV.F.2)** Parmi les sous-espaces $E_k$, quel est celui pour lequel la distance euclidienne de $Y_0$ à $E_k$ est la plus petite et quelle est cette distance ?

Nous laissons au voyageur le soin de poursuivre les calculs.

 

# V Utilisation du logiciel de calcul

On cherche une solution au problème des trois cruches, tel qu'il est posé dans la partie IV, plus directe que la précédente, en écrivant, dans le langage de programmation vu en classe, un programme envisageant, à partir de l'état initial (8,0,0) de l'eau dans les cruches, toutes les manipulations possibles et les états qu'elles donnent, jusqu'à obtenir l'état (4,4,0).

Pour un certain état des cruches, les trois volumes d'eau contenus dans $C_1$, $C_2$ et $C_3$ sont les trois éléments d'une colonne $m$ d'un tableau (extensible) $T$ à trois lignes et $n$ colonnes ($n$ peut varier).

Initialement $T$ n'a qu'une colonne contenant $(8,0,0)$ et $n=1$.

***V.A*** – Écrire une procédure nommée `figure`. Cette procédure, destinée à éviter les répétitions, attend trois nombres à l'entrée et l'appel de `figure(a,b,c)` renvoie la valeur `true` si l'état $(a,b,c)$ figure déjà dans une colonne du tableau $T$. Elle renvoie `false` dans le cas contraire.

***V.B*** – Pour $i$, $j$ et $m$ fixés, écrire la suite d'instructions permettant, en examinant l'état des cruches défini par la colonne $m$ du tableau $T$, de trouver, si $C_i$ n'est pas vide, celle des deux manipulations $v(i,j)$ ou $p(i,j)$ qui est alors possible et, si cette manipulation donne un état non encore répertorié, le ranger dans le tableau $T$ en accolant une nouvelle colonne à celui-ci.

Programmer aussi l'affichage de la valeur de $m$ et du tableau (complété). Cela permettra de suivre l'avancement du travail pendant que le programme s'exécutera.

***V.C*** – Incorporer les instructions précédentes dans des boucles imbriquées permettant de traiter tous les couples $(i,j)$ possibles et faire varier $m$ jusqu'à l'apparition, dans le tableau, de l'état espéré $(4,4,0)$.

***V.D*** – Par suite d'une panne, l'écran reste figé sur l'affichage intermédiaire suivant de $m$ et du tableau $T$

$$m=7 \qquad T=\begin{bmatrix}8&3&3&6&6&1&1\\0&5&2&2&0&5&4\\0&0&3&0&2&2&3\end{bmatrix}$$

Finir manuellement le travail du programme, sans donner trop de détails.

***V.E*** – On pourrait alors reconstituer la suite des manipulations que le voyageur doit faire. On s'en tiendra à décrire la dernière manipulation et à la comparer avec celle trouvée dans la partie IV.

• • • FIN • • •