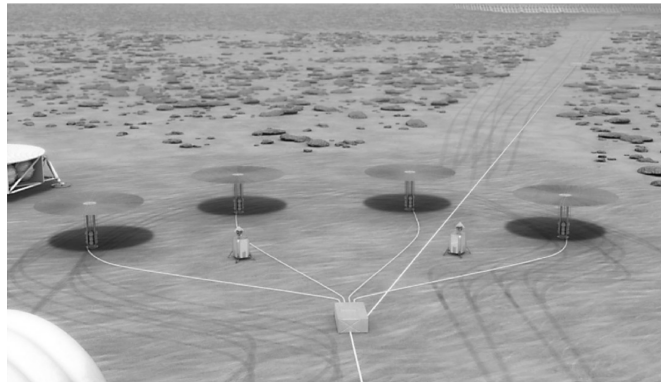


## *Le projet KRUSTY*

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Des données et relations utiles sont regroupées dans le document réponse.

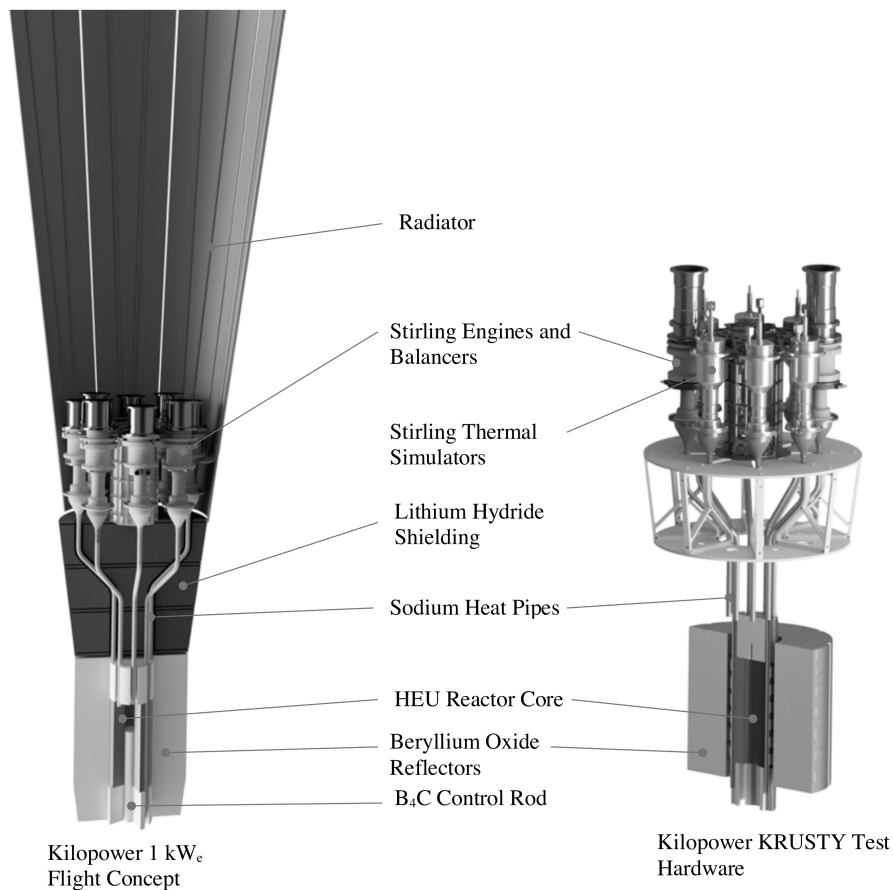


**Figure 1** Vue d'artiste de plusieurs réacteurs sur Mars (NASA)

Le projet KRUSTY, dont le nom est l'acronyme de « Kilopower Reactor Using Stirling Technology », est un projet de la NASA qui vise à développer des réacteurs nucléaires pour l'exploration spatiale. Le projet a débuté en 2012 et est actuellement en phase de test. Il est présenté dans le document « Des centrales nucléaires de poche pour alimenter des colonies sur Mars ? » disponible dans le document réponse. Cette épreuve aborde différents aspects du prototype de test.



**Figure 2** Système de test KRUSTY positionné tête en bas dans une chambre à vide : moteurs Stirling en bas et cœur d'uranium en haut (NASA)



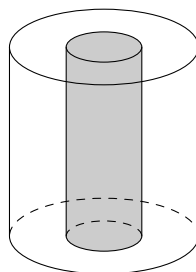
**Figure 3** Le système de propulsion nucléaire Kilopower et le système KRUSTY (NASA)

## I Le cœur du réacteur

### I.A – Présentation du dispositif

Le réacteur est composé par un alliage d'uranium (93%) et de molybdène (7%). Le cœur du réacteur est entouré par un réflecteur constitué d'une couche d'oxyde de béryllium, qui empêche les neutrons de s'échapper du réacteur et qui permet donc à la réaction nucléaire de continuer. Ce réflecteur réduit aussi les émissions de radiations gamma qui peuvent endommager l'électronique embarquée. La réaction nucléaire est contrôlée par une unique barre centrale de carbure de bore  $B_4C$ , qui est un absorbeur de neutrons et qui ne contient aucune matière nucléaire fissible (figure 4).

Le réacteur est lancé froid pour empêcher la formation de produits hautement radioactifs. Lorsque le réacteur atteint sa destination, la barre de carbure de bore est retirée pour permettre à la réaction nucléaire de s'enclencher. Une fois celle-ci initiée, elle ne peut plus être complètement stoppée. Toutefois, la profondeur d'enfoncement de la barre de carbure de bore permet de contrôler la vitesse de la réaction nucléaire et ainsi d'ajuster la production d'énergie à celle nécessaire au fonctionnement du moteur Stirling.



**Figure 4** Schéma du cœur du réacteur : la zone grise correspond à la barre de carbure de bore et la zone blanche à l'uranium

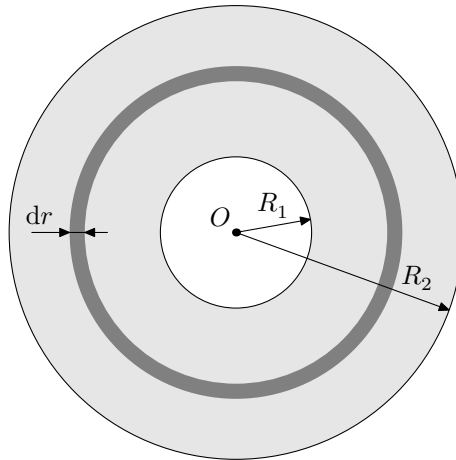
**Q 1.** À l'aide de vos connaissances, expliquer succinctement pourquoi il est impossible de reproduire sur Mars le fonctionnement habituel d'une centrale nucléaire terrestre.

Les données du test indiquent que les réactions nucléaires dans le cœur fournissent, en régime permanent à  $800\text{ }^\circ\text{C}$ , une puissance thermique  $P$  d'environ  $4\text{ kW}$ . Le cœur du système de test contient  $m = 28\text{ kg}$  d'uranium. On note  $P_v$  la puissance thermique issue des réactions nucléaires par unité de volume.

**Q 2.** Donner l'expression de cette puissance thermique volumique  $P_v$  en fonction de la puissance thermique  $P$ , de la masse  $m$  d'uranium ainsi que de la masse volumique de l'uranium. Effectuer l'application numérique.

**I.B – La température du cœur**

On étudie uniquement le cœur d'uranium, modélisé comme un cylindre creux de rayon interne  $R_1 = 10$  cm et de rayon externe  $R_2 = 20$  cm. Le système étudié est une couronne cylindrique d'épaisseur  $dr$ , comprise entre  $r$  et  $r + dr$ , et de hauteur  $h$ . On suppose le problème invariant par rotation autour de l'axe de révolution du cylindre et invariant par translation suivant le même axe (figure 5).



**Figure 5** Schéma du système étudié vu de dessus. La zone grisée correspond à l'ensemble du cœur en uranium, la zone plus foncée au système étudié.

On note  $\Phi(r)$  le flux thermique traversant une surface cylindrique située à la distance  $r$  du centre. On effectue un bilan d'enthalpie sur une couronne cylindrique d'épaisseur  $dr$  et de hauteur  $h$ . Ce bilan effectué pendant un temps  $dt$  s'écrit

$$dH = \Phi(r) dt - \Phi(r + dr) dt + P_v 2\pi r h dr dt. \quad (\text{I.1})$$

**Q 3.** Interpréter chacun des termes du bilan de l'équation (I.1).

**Q 4.** Montrer qu'en régime stationnaire, il vient

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = 2\pi h P_v r. \quad (\text{I.2})$$

**Q 5.** En déduire l'expression de  $\Phi(r)$  en fonction de  $h$ ,  $r$ ,  $P_v$  et d'une constante  $A$  qu'on ne cherchera pas à calculer.

On note  $\lambda$  le coefficient de conduction thermique de l'uranium.

**Q 6.** Rappeler la loi de la conduction thermique de Fourier.

**Q 7.** En déduire l'expression de  $\Phi(r)$  en fonction de  $h$ ,  $r$  et  $\frac{dT(r)}{dr}$ . On pourra utiliser le formulaire fourni en fin d'énoncé.

**Q 8.** En déduire que l'expression de la température en fonction de la distance  $r$  est donnée par l'équation

$$T(r) = -\frac{A}{\lambda 2\pi h} \ln r - \frac{P_v}{4\lambda} r^2 + B \quad (\text{I.3})$$

où  $B$  est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question.

**Q 9.** Justifier que  $\Phi(R_1) = 0$  en régime permanent. En déduire que  $A = -P_v \pi R_1^2 h$ .

**Q 10.** En déduire l'expression de la température sur la face intérieure du cœur en contact avec le carbure de bore  $T(R_1)$  en fonction de  $T(R_2)$ , la température sur la paroi extérieure du cœur ainsi que de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $P_v$  et  $\lambda$ .

**Q 11.** Sachant que la température  $T(R_2)$  vaut  $800$  °C, en déduire la valeur numérique de la température  $T(R_1)$ . On prendra  $P_v = 2,7 \times 10^6$  W·m<sup>-3</sup>.

**Q 12.** Justifier, sans calcul, que la température de la barre de carbure de bore est uniforme.

**Q 13.** Sachant que la température de fusion du carbure de bore est d'environ  $2350$  °C, que peut-on conclure sur l'aspect thermique de la modélisation proposée ?

**I.C – Durée de vie du réacteur**

L'uranium composant le cœur est composé d'un mélange isotopique artificiel. Dans la nature, l'uranium est composé à plus de 99 % d'uranium 238 tandis que celui du cœur est dit « hautement enrichi » car il contient environ 20 % en masse d'uranium 235 et 80 % en masse d'uranium 238. Seul l'uranium 235 est fissile et l'énergie

libérée par toute la chaîne de réactions de fission nucléaire initiée à partir de la fission d'un atome d'uranium 235 libère environ 200 MeV.

**Q 14.** À partir des différentes informations disponibles dans cette partie, estimer la valeur de la durée de vie de ce réacteur. Commenter.

## II Quelques aspects de la chimie du sodium

Le transport de l'énergie thermique entre le cœur du réacteur et le moteur de Stirling se fait à l'aide de sodium liquide. Nous allons dans cette partie étudier certaines de ses propriétés chimiques.

### II.A – L'élément sodium

Dans la classification périodique des éléments, les indications fournies à propos du sodium sont  ${}_{11}^{23}\text{Na}$ .

**Q 15.** Donner le nombre de neutrons, de protons et d'électrons de l'atome de sodium.

**Q 16.** En déduire la configuration électronique du sodium.

**Q 17.** En déduire sa position dans le tableau périodique. La réponse doit être justifiée à partir de la configuration électronique.

**Q 18.** À quelle famille d'éléments appartient le sodium ? Donner au moins une propriété physique ou chimique de cette famille.

**Q 19.** Quel est l'ion monoatomique formé par le sodium ? Justifier.

### II.B – La réaction du sodium avec l'eau

Le sodium solide réagit totalement avec l'eau pour former du dihydrogène gazeux, des ions  $\text{Na}_{(\text{aq})}^{+}$  et des ions hydroxydes  $\text{HO}_{(\text{aq})}^{-}$ .

**Q 20.** Donner l'équation chimique de la réaction modélisant cette transformation chimique.

**Q 21.** À l'aide des données fournies en fin d'énoncé, calculer l'enthalpie standard de cette réaction  $\Delta_r H^\circ$  à 293 K. Cette réaction est-elle endothermique ou exothermique ?

Le dihydrogène peut réagir avec le dioxygène pour produire de l'eau. Cette transformation chimique peut être explosive. Pour cette raison, le sodium solide n'existe qu'en l'absence totale d'eau ; il n'existe donc pas dans la nature.

**Q 22.** Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique entre  $\text{H}_{2(\text{g})}$  et  $\text{O}_{2(\text{g})}$  pour produire de l'eau liquide.

**Q 23.** Établir l'expression de la constante thermodynamique d'équilibre de cette réaction à 293 K en fonction des potentiels standards  $E^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})})$  et  $E^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})})$ . Déterminer la valeur de cette constante thermodynamique.

On rappelle la relation de Van't Hoff reliant la variation de la constante thermodynamique d'équilibre  $K^\circ$  d'une réaction chimique en fonction de la température à l'enthalpie standard de la réaction :

$$\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}. \quad (\text{II.1})$$

**Q 24.** Comment évolue la constante thermodynamique d'équilibre avec la température ? Justifier.

### II.C – Le sodium dans des cristaux ioniques

En contact avec l'air sec, le sodium s'oxyde naturellement. La maille de cet oxyde est représentée figure 6.

**Q 25.** À partir de l'étude de la maille de la figure 6, donner la formule chimique de l'oxyde de sodium.

L'ion sodium peut aussi se combiner avec l'ion chlorure pour former le solide ionique NaCl.

**Q 26.** Quelle est la principale utilisation courante de ce solide ionique ?

**Q 27.** On verse 1 mol de NaCl solide dans un litre d'eau pure à 25 °C. La dissolution est-elle totale ?

### II.D – Fabrication industrielle du sodium liquide

Le document « Cellules d'électrolyse de Downs », disponible dans le document réponse, présente une méthode de fabrication de sodium liquide.

On considère que NaCl liquide se comporte dans ce cas comme un mélange des ions  $\text{Na}^{+}$  et  $\text{Cl}^{-}$ .

**Q 28.** À partir des espèces présentes, écrire la demi-équation d'oxydoréduction modélisant la réaction électrochimique de formation du sodium liquide. Est-ce une oxydation ou une réduction ? A-t-elle lieu à l'anode ou à la cathode ?

**Q 29.** En déduire l'équation de la réaction électrochimique ayant lieu sur l'autre électrode. Est-ce une oxydation ou une réduction ? Quel est le gaz verdâtre libéré ?

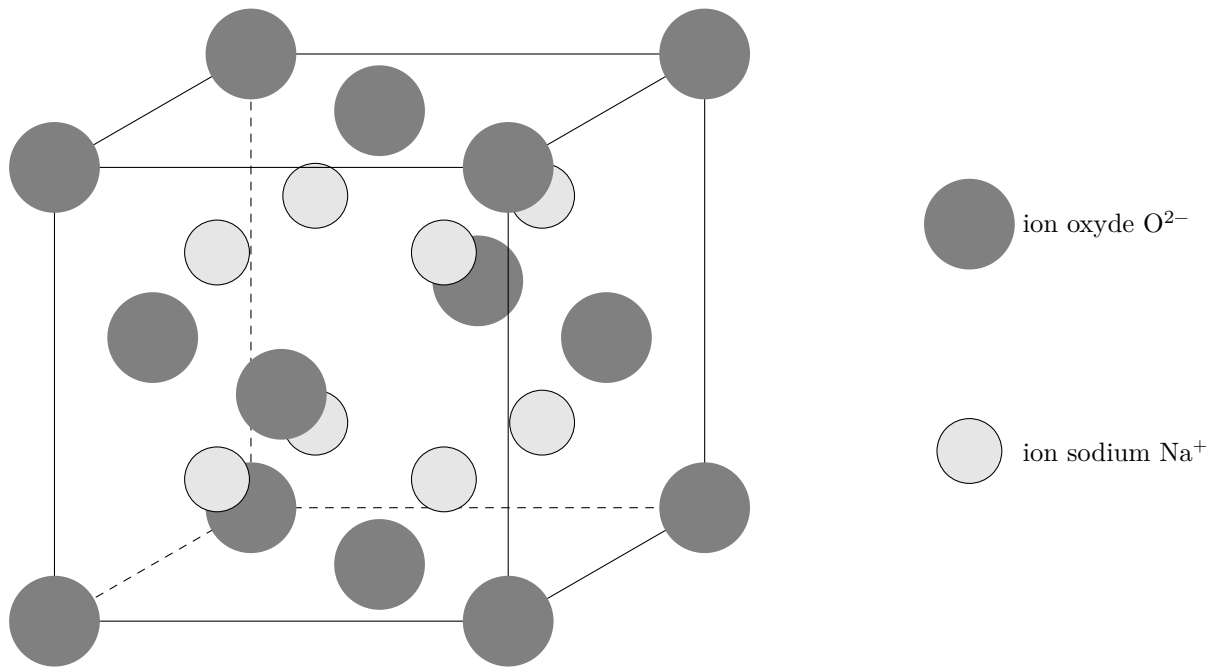


Figure 6 Maille de l'oxyde de sodium

### III Le moteur Stirling

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud »). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion.

La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à  $-200\text{ °C}$  ou de chauffer à plus de  $700\text{ °C}$ .

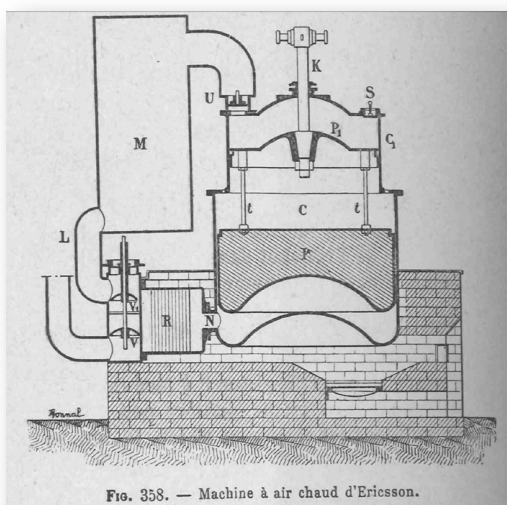


FIG. 358. — Machine à air chaud d'Ericsson.

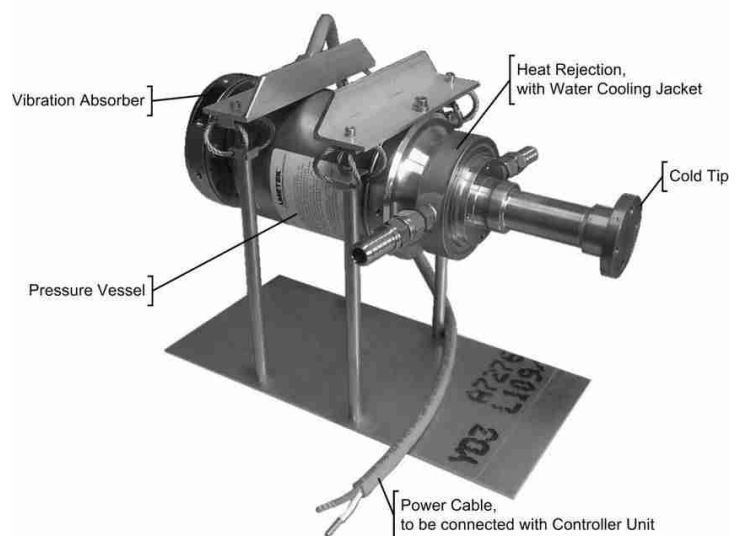


Figure 7 Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

### III.A – Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal  $V_1$ , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal  $V_2$ . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température  $T_3$  à la chambre froide à la température  $T_1 < T_3$  et réciproquement.

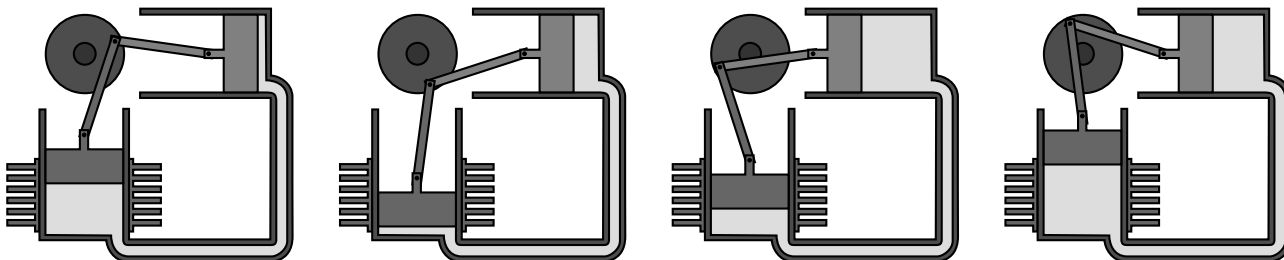


Figure 8 Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 8) :

- une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;
- une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme  $(p, V)$  en figure B du document réponse.

**Q 30.** Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

**Q 31.** Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

### III.B – Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci,  $n$  moles de gaz parfait de coefficient adiabatique  $\gamma$  subissent les transformations suivantes :

- une compression  $(1 \rightarrow 2)$  isotherme réversible à la température  $T_1$ ,
- un échauffement  $(2 \rightarrow 3)$  isochore jusqu'à l'état 3 de température  $T_3$ ,
- une détente  $(3 \rightarrow 4)$  isotherme réversible à la température  $T_3$ ,
- un refroidissement  $(4 \rightarrow 1)$  isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

**Q 32.** Représenter sur la figure B du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note  $r = \frac{V_1}{V_2}$  le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant d'un gaz de  $n$  moles de gaz parfait vaut  $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$  où  $R$  est la constante des gaz parfaits.

**Q 33.** Exprimer  $W_{12}$ , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_1$  et  $r$ . En déduire le transfert thermique  $Q_{12}$  reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_1$  et  $r$ . Préciser les signes de  $W_{12}$  et de  $Q_{12}$ .

**Q 34.** Exprimer  $Q_{23}$ , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_1$ ,  $T_3$  et  $\gamma$ . Préciser son signe.

**Q 35.** Exprimer  $W_{34}$ , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_3$  et  $r$ . En déduire le transfert thermique  $Q_{34}$  reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_3$  et  $r$ . Préciser les signes de  $W_{34}$  et  $Q_{34}$ .

**Q 36.** Exprimer le transfert thermique  $Q_{41}$  reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_1$ ,  $T_3$  et  $\gamma$ . Préciser son signe.

### III.C – Rendement du moteur

Q 37. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de  $T_1$ ,  $T_3$ ,  $r$  et  $\gamma$ .

Q 38. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de  $T_1$  et  $T_3$ .

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore ( $4 \rightarrow 1$ ) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore ( $2 \rightarrow 3$ ). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

Q 39. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30 % et 50 % de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q 40. En prenant une température chaude de 640 °C et une température froide de 60 °C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

## IV Un modèle simplifié de génératrice linéaire : le rail de Laplace

Le moteur Stirling fournit de la puissance mécanique sous la forme d'un mouvement linéaire du piston. Pour utiliser cette puissance, il faut la convertir en électricité. Pour cela, une génératrice linéaire est utilisée. Un modèle très simplifié de cette conversion est celui du rail de Laplace.

### IV.A – Présentation du système

On considère le dispositif des rails de Laplace représenté figure A du document réponse. Il est constitué de :

- deux rails fixes conducteurs parallèles distants de  $L$  ;
- une barre conductrice rectiligne mobile  $MN$  de masse  $m$ , pouvant se déplacer suivant la direction des deux rails fixes. Les frottements sont négligés.

L'ensemble forme un circuit déformable, plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  stationnaire et uniforme. On considère que le circuit ainsi formé possède une résistance électrique totale  $R$ . La tige est initialement immobile.

On néglige tout phénomène d'auto-induction.

À partir de  $t = 0$ , un opérateur extérieur applique à la barre une force  $\vec{F} = F\vec{e}_x$  constante sur la tige initialement immobile. On repère la position de la tige par son abscisse  $x$ .

Q 41. Prévoir qualitativement l'évolution de la vitesse de la tige.

Q 42. Donner l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur une barre conductrice  $MN$  parcourue par un courant  $i$  dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.

Q 43. On suppose la tige en mouvement, compléter le schéma de la figure A en représentant la force électromotrice d'induction  $\epsilon(t)$ , le courant ainsi que la force de Laplace. On ne cherchera pas à donner les valeurs de ces grandeurs pour le moment.

### IV.B – Étude temporelle

Q 44. Donner l'expression de la force électromotrice d'induction  $\epsilon(t)$  en fonction de  $v(t)$ ,  $L$  et  $B$ .

Q 45. Donner l'équation électrique du système liant  $\epsilon(t)$ ,  $i(t)$  et les paramètres du problème.

Q 46. Donner l'équation mécanique du système liant  $\dot{v}(t)$ ,  $F$ ,  $i(t)$  et les paramètres du problème.

Q 47. Dédurre des équations précédentes une équation différentielle sur  $v(t)$ .

Q 48. En déduire la dimension de  $\frac{Rm}{B^2L^2}$ .

Q 49. Résoudre cette équation différentielle et puis tracer  $v(t)$  en fonction du temps. On fera apparaître sur le graphe le temps caractéristique  $\tau$  du problème. Ces résultats sont-ils en accord avec la prédiction de la question 41 ?

### IV.C – Bilan de puissance

Q 50. Exprimer la puissance de la force de Laplace  $\mathcal{P}_L$ .

Q 51. Donner l'expression de la puissance dissipée par effet Joule  $\mathcal{P}_J$  en fonction de  $i(t)$ ,  $L$ ,  $B$  et  $v(t)$ , puis en fonction de la puissance de la force de Laplace  $\mathcal{P}_L$ . Interpréter cette relation.

Q 52. Donner l'expression de la puissance fournie par l'opérateur extérieur  $\mathcal{P}_{op}$  en fonction de  $F$  et  $v(t)$ .

Q 53. À partir de l'équation mécanique, effectuer un bilan de puissance global et interpréter chacun des termes.

• • • FIN • • •