CONCOURS GENERAL 1997

Exercice I

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.

Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y-a-t-il de choix possibles ?

Exercice II

Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre O, de rayon R, et un cône de sommet O qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon r.

Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant même axe de révolution ?

Exercice III

C est un cube d'arête 1 et p est la projection orthogonale sur un plan. Quelle est la valeur maximale de l'aire de $p(C)$?

Exercice IV

Etant donné un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs de ses côtés et m, n, p les longueurs de ses médianes. Pour tout réel α strictement positif, on définit le réel $\lambda(\alpha)$ par la relation

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = (\lambda(\alpha))^\alpha (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha)$$

1. Calculer $\lambda(2)$.
2. Calculer la limite de $\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
3. A quelle condition portant sur a, b, c le réel $\lambda(\alpha)$ est-il indépendant de α ?

Exercice V

Dans le plan, soient A et B deux points distincts. Pour tout point C extérieur à la droite (AB), on note G l'isobarycentre du triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit.

1. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$. Quel est l'ensemble Γ des points C tels que
$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \alpha + 2k\pi$$
k étant un entier ? Lorsque C décrit Γ, montrer que G et I décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.
2. On suppose désormais que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Comment doit-on choisir C dans Γ pour que la distance GI soit minimale ?
3. On note $f(\alpha)$ la distance minimale GI de la question précédente. Expliciter $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et α. Déterminer la valeur maximale de $f(\alpha)$ lorsque α décrit $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$.