

### EXERCICE I

Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :

- (a) les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales
- (b)  $AB = 3$  et  $CD = \sqrt{2}$ .

Déterminer la valeur minimale de  $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$ .

### EXERCICE II

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant, pour tout entier  $n$ , la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$$

Montrer qu'il existe un entier  $p$  non nul, tel que la relation  $u_n = u_{n+p}$  ait lieu pour tout entier naturel  $n$ .

### EXERCICE III

Pour tout réel  $x$  on note  $E(x)$ , le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . Soit  $k$  un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :

$$f(n) = n + E(\sqrt[k]{n} + \sqrt[k]{n})$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $f$ .

### EXERCICE IV

On considère deux droites  $D_1$  et  $D_2$  sécantes en  $O$ , et un point  $M$  n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables,  $A$  sur  $D_1$  et  $B$  sur  $D_2$ , tels que le point  $M$  appartienne au segment  $[A, B]$ .

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)

- (1) Montrer qu'il existe une position des points  $A$  et  $B$  pour laquelle l'aire du triangle  $OAB$  est minimale. Construire les points  $A$  et  $B$  ainsi déterminés.
- (2) Montrer qu'il existe une position des points  $A$  et  $B$  pour laquelle le périmètre du triangle  $OAB$  est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles  $OAM$  et  $OBM$ , ainsi que la relation :

$$\frac{AM}{\tan \frac{\widehat{OAM}}{2}} = \frac{BM}{\tan \frac{\widehat{OBM}}{2}}$$

Construire les point  $A$  et  $B$  ainsi déterminés.

### EXERCICE V

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble  $A$  de  $n$  points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.

Montrer qu'il existe un ensemble  $S$  de  $2n - 5$  points du plan tel que pour tout triangle dont les sommets sont des points de  $A$  il existe au moins un point de  $S$  qui lui soit strictement intérieur.