CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION 2020

—

MATHÉMATIQUES SÉRIES ES ET L

(Classes de terminale séries ES et L)

Durée : 5 heures

—

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Le sujet comporte deux problèmes et un exercice indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Consignes aux candidats

- **Ne pas utiliser d'encre claire**
- **N'utiliser ni colle, ni agrafe**
- **Numéroter chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)**
- **Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :**

Concours / Examen : CGL

Epreuve : 101 **Matière : MESL** **Session : 2020**

PROBLÈME I

Fonction d'antirépartition

Pour X une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$ on pose $A(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x)$.
La fonction A ainsi définie est appelée « fonction d'antirépartition de X ».

Partie I - Cas des variables aléatoires discrètes

1° Dans cette question, X est la variable aléatoire constamment égale à 0.

(a) Que vaut $A(x)$ si $x < 0$? Et si $x \geqslant 0$?

(b) Tracer la courbe représentative de A.

(c) Soit Y la variable aléatoire constamment égale à x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$). Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la courbe représentative de la fonction d'antirépartition de X à celle de la fonction d'antirépartition de Y ?

2° Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose à présent que X est la variable aléatoire uniformément répartie sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

(a) Calculer $A(k)$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.

(b) Tracer la courbe représentative de A dans le cas $n = 4$.

3° Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un sportif participe à un concours de saut en hauteur qui comporte n hauteurs successives

$$h_1 < h_2 < ... < h_n$$

Si le sportif franchit une hauteur, il est qualifié pour la suivante. Sinon, il est éliminé.
La probabilité que le sportif parvienne à sauter la hauteur h_k est égale à $\dfrac{1}{k}$.
Il y a indépendance des sauts.
Dans cette question, X est ainsi définie :

- Si le sportif n'a pas pu franchir la première hauteur (il est donc éliminé d'entrée), on a $X = 0$;
- Si le sportif a franchi toutes les hauteurs, on a $X = n$;
- Lorsque $k \in \{1, .., n-1\}$, si le sportif a franchi toutes les hauteurs jusqu'à h_k incluse mais qu'il a échoué à la suivante (et a donc été alors éliminé), on a $X = k$.

Notation : soit un entier naturel q, la quantité $1 \times 2 \times ... \times (q-1) \times q$ est notée $q!$.
Ainsi, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. On convient que $1! = 1$ et que $0! = 1$.

(a) i. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 1]$ et soit $p \in]0, 1[$. Quelle est la probabilité d'avoir $U < p$?

ii. On dispose d'une instruction informatique NombreAléatoire() qui simule, à chaque fois qu'on l'appelle, une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Écrire un algorithme demandant n à l'utilisateur et affichant, pour un concours de saut donné, la valeur de X obtenue.

(b) Combien vaut $P(X = 0)$? $P(X = 1)$? $P(X = 2)$? $P(X = n)$?

(c) Soit $k \in \{0, ..., n\}$. Exprimer $A(k)$ à l'aide de la factorielle d'un entier bien choisi.

(d) Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Exprimer $P(X = k)$ à l'aide de $A(k)$ et $A(k-1)$.

(e) Vérifier à l'aide de la question précédente que $P(X = 1) + ... + P(X = n) = 1$ et que pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$,

$$P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}$$

4° Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
X désigne désormais une variable quelconque à valeurs dans $\{1, ..., n\}$.
En utilisant l'expression de $P(X = k)$ en fonction de $A(k)$ et $A(k-1)$, montrer que l'espérance $E(X)$ de X vérifie :

$$E(X) = A(0) + A(1) + ... + A(n-1)$$

Partie II - Cas des variables aléatoires à densité

On rappelle que pour deux réels a et b tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ est définie comme étant égale à $-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et que de plus $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t$ est définie et vaut 0.

1° Soit M un réel strictement positif. On considère une variable aléatoire X uniformément répartie sur l'intervalle $[0,M]$.

(a) Rappeler l'expression de la densité de la loi uniforme sur $[0,M]$ ainsi que la valeur de l'espérance $E(X)$ de X.

(b) Calculer $A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.

(c) Vérifier que $\int_0^M A(x)\mathrm{d}x = E(X)$.

2° Soit f la fonction définie par $f(t) = e^{-t}$ si $t \geqslant 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$.

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Calculer $F(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ ainsi que sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.

On admet que f est une densité de probabilité. Soit désormais X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(b) Que vaut $P(X \leqslant x)$ lorsque $x < 0$? En déduire $A(x)$ pour $x < 0$.

(c) Exprimer, pour tout $x \geqslant 0$, $A(x)$ en fonction de $F(x)$ puis en fonction de x.

(d) Vérifier que pour tous réels positifs x et y, $A(x+y) = A(x)A(y)$. En déduire que

$$P_{[X>x]}(X > x+y) = P(X > y)$$

Donner une interprétation de ce résultat.

(e) i. Justifier que la fonction $t \longmapsto tA(t)$ est dérivable pour tout $t > 0$ et préciser sa dérivée.

ii. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]\varepsilon, +\infty[$. Justifier que $\int_\varepsilon^x A(t)\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x tf(t)\mathrm{d}t + xA(x) - \varepsilon A(\varepsilon)$.

iii. On admet que cette formule est encore valable pour $\varepsilon = 0$. En déduire la valeur de $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

(f) i. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2e^{-x}$. Montrer que g est positive sur $]0, +\infty[$.

ii. En déduire que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant xA(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, puis la limite de $xA(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(g) Justifier à l'aide de ce qui précède l'existence de la limite de $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la calculer.

(h) Ce résultat vous paraît-il en cohérence avec les résultats observés en Partie I et en Partie II 1)c) ?

EXERCICE

Une équation pour deux inconnues

1° Soient x un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul. Justifier que $e^{n\ln x} = x^n$.

À partir de cette égalité, on définit, pour tous x et y réels strictement positifs, $x^y = e^{y\ln x}$.
Dans la suite de ce problème, on s'intéresse à l'équation $x^y = y^x$ d'inconnues x et y réelles, distinctes et strictement positives.

2° (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

(b) Soit x un réel strictement positif.
En considérant les intersections des droites parallèles à l'axe des abscisses avec la courbe représentative de f, déterminer, suivant les valeurs de x, le nombre de réels strictement positifs y tels que $x^y = y^x$.

3° Est-il possible qu'il existe deux entiers naturels distincts x et y tels que $x^y = y^x$?
Dans l'affirmative, préciser ces entiers.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME II

Mathématiques financières

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème et d'étudier la rentabllilité d'un investissement en fonction du taux d'intéret ce qui conduit à l'étude dans les parties II et III des équations suivantes pour $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a &= 0 \\ Nx^N + (N-1)\,x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a &= 0 \end{aligned}$$

Dans la partie I, on étudie la première de ces questions dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3)

On rappelle que $|x|$ est le maximum des nombres x et $-x$. Par exemple : $|-2| = |2| = 2$.

Partie I

1° **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

(a) Montrer que l' équation $x^2 + x - 1 = 0$ possède deux solutions réelles dont une seule appartient à $]0,1[$. Préciser la valeur de cette solution que l'on note r_2.

(b) Montrer que :
Si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, alors $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$

(c) Prouver la proposition suivante :
$\forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{4}{9}\left|x - y\right|$
On pourra observer que :
$\forall x, y \in [0,1], \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right| = \frac{\left|x-y\right|}{(x+1)(y+1)}$

(d) On considère la suite défnie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Prouver la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f(u_n) - f(r_2)\right| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)|u_n - r_2|$$

En déduire que, de proche en proche,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

(e) En déduire un algorithme permettant de donner une valeur approchée de r_2 à 10^{-4} près.
Donner la valeur correspondante de u_n et préciser son rang n.

2° **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$

On considère dans cette question la fonction g définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

(a) Montrer que dans l'intervalle $]0,1[$, l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ possède une seule solution, que l'on note r_3.

(b) Montrer que :
Si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, alors $g(x)$ appartient à $[1/3, 1]$

(c) Montrer que :
$\forall x, y \in [0,1], \left|\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{y^2+y+1}\right| = \frac{\left|x-y\right| \times (x+y+1)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$

(d) Montrer que :

$\forall x, y \in [0,1]\ \dfrac{(x+y+1)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)} \leqslant \dfrac{(x+x^2+y+1)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$

(e) Montrer que :

$\forall x, y \in [0,1],\ \dfrac{x+x^2+y+1}{x^2+x+1} \leqslant y+1$

(f) Montrer que :

$\forall x, y \in [0,1],\ \left|g(x)-g(y)\right| \leqslant |x-y| \dfrac{y+1}{y^2+y+1}$

(g) Prouver la proposition suivante :

$\forall x, y \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right],\ \left|g(x)-g(y)\right| \leqslant \dfrac{18}{19}|x-y|$

(h) On considère la suite défnie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

Prouver la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|g(u_n)-g(r_3)\right| \leqslant \left(\frac{18}{19}\right)|u_n - r_3|$$

En déduire que, de proche en proche,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_3| \leqslant \left(\frac{18}{19}\right)^n$$

Prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3

Partie II

1° **Étude de l'équation** $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

On note $f_{N,a}$ la fonction polynôme définie par $f_{N,a}(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

(a) Montrer que dans $]0,+\infty[$, l'équation $f_{N,a}(x) = 0$ possède une seule solution que l'on note x_N. Montrer que, lorsque $N > a$, $x_N \in]0,1[$.

(b) Montrer la relation, notée $(*)$:

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1) f_{N,a}(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$

2° **Solution positive de l'équation** $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

(a) Montrer que $f_{N+1,a}(x_N) > f_{N,a}(x_N)$ et en déduire que la suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

En déduire que la suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$

(b) Quand $N \geqslant A$ où A est un entier naturel non nul, montrer que $0 < x_N \leqslant x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leqslant (x_A)^N$.

En choisissant $A > a$, en déduire la limite de la suite $\left(x_N{}^N\right)_{N\in\mathbb{N}}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation $(*)$, prouver que la limite x^* vaut $\dfrac{a}{a+1}$.

On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, où ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$

(c) Établir à l'aide de la relation $(*)$ l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a)$$

En déduire la limite de la suite $((N+1)\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est nulle lorsque N tend vers $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

3° **Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement**

Le taux d'intérêt d'un placement étant supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, quelle somme doit-on placer à l'année 0 pour obtenir S à l'année k?

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est-à-dire pendant les années $1, 2, \ldots, N$, les sommes S n'étant pas remises en jeu.

Tournez la page S.V.P.

4° (a) En comparant la somme qu'il aurait fallu placer à l'année 0 pour retirer S pendant chacune des N années suivantes avec l'investissement fixe de la somme S_0, montrer que l'investissement est intéressant si :

$$V(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0 \geqslant 0$$

(b) Montrer que l'équation $V(r) = 0$ possède une unique solution strictement positive r_N si $N > S_0/S$. Donner l'expression de celle-ci en fonction de x_N racine de $f_{N,S_0/S}$ définie ci-dessus et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leqslant r_N$

(c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N), puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0

Partie III

1° **Étude de l'équation** $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$

On note $g_{N,a}$ la fonction polynôme définie par : $g_{N,a}(x) = Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.

(a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $g_{N,a}(x) = 0$ possède une seule solution que l'on note y_N. Montrer que $y_N \in]0, 1[$ lorsque $N(N+1) > 2a$.

(b) Montrer que :

$\forall x \neq 1, \quad Nx^{N-1} + (N-1)x^{N-2} + \ldots + 2x + 1 = \dfrac{-Nx^N(1-x) + 1 - x^N}{(1-x)^2}$

(c) En déduire la relation, notée $(**)$:

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 g_{N,a}(x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2$

2° **Solution positive de l'équation** $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$

(a) Montrer que $g_{N+1,a}(y_N) > g_{N,a}(y_N)$ et en déduire que la suite $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

En déduire que la suite $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel y^* appartenant à $[0, 1[$.

(b) Montrer que $0 < N\, {y_N}^N \leqslant N\, {y_A}^N$ pour $N \geqslant A$ où A est un nombre entier tel que $A(A+1) > 2a$.

En déduire la limite de la suite $\left(N\, {y_N}^N\right)_{N\in\mathbb{N}}$ lorsque N tend vers $+\infty$, et, à l'aide de la relation $(**)$, exprimer la limite y^* en fonction de a.

On modifie les hypothèses précédentes et on suppose désormais que l'investissement considéré, qui nécessite toujours l'apport initial d'une somme S_0 l'année 0, rapporte de plus en plus pendant chacune des N années suivantes, comme suit : une somme S l'année 1, une somme $2 \times S$ l'année 2, une somme $3 \times S$ l'année 3,..., une somme $N \times S$ l'année N.

Le taux d'intérêt des placements est toujours supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$

3° **Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement**

(a) Montrer que l'investissement décrit sera réalisé si :

$$W(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0 \geqslant 0$$

(b) Montrer que l'équation $W(r) = 0$ possède une solution strictement positive r_N et une seule lorsque $N(N+1) > 2S_0/S$, puis donner l'expression de celle-ci en fonction de y_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leqslant r_N$.

(c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N) , puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0