De la vie sur Mars !

La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a enfin réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : de la vie sur Mars ! Il s'agit évidemment d'une forme primitive de vie, et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millième de millimètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des *cellules*. Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :

- Il y a trois espèces identités de cellules, que l'on désignera par A, B et C.
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir reproduction que lorsque les trois cellules-parents sont « compatibles », c'est-à-dire que au moins deux sont de la même espèce.

1. On a observé des proportions respectives a, b, c de cellules des différentes espèces, avec $a + b + c = 1$.
   (a) Quelle est la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles ?
   (b) Montrer que $p \geq \frac{7}{9}$. On pourra d'abord établir une inégalité à c fixé.

   Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces des cellules-parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses cellules-parents. En revanche, lorsque deux cellules-parents sont d'une espèce α et que le troisième est d'une espèce β, les scientifiques hésitent entre deux modèles :
   - Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire α,
   - Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce minoritaire β.

   Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note $a_0 > b_0 > c_0$ les proportions des différentes espèces à la génération 0, et a_n, b_n, c_n les proportions des différentes espèces à la génération $n \in \mathbf{N}$. Pour déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$, on prend trois cellules au hasard suivant les proportions a_n, b_n, c_n, et a_{n+1} sera la probabilité que la descendance soit de type A, sachant que les trois cellules-parents sont compatibles. Il en est de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. Etude du premier scénario. On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier scénario.
   (a) Vérifier que
   $$a_{n+1} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2(3 - 2b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n^2(3 - 2c_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$
   (b) On rappelle dans cette question et les suivantes que $a_0 > b_0 > c_0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $a_n > b_n > c_n$. En déduire que $a_n > \frac{1}{3}, b_n < \frac{1}{2}$ et $c_n < \frac{1}{3}$.
   (c) Vérifier que les suites $(a_n - b_n)_{n \geq 0}$ et $(a_n - c_n)_{n \geq 0}$ sont croissantes.
   (d) Prouver que $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ convergent et déterminer leurs limites.
3. Etude du second scénario. On suppose maintenant que c'est le deuxième scénario qui est privilégié.
   (a) Déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.
   (b) On suppose à partir de maintenant que $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$. Montrer que pour tout n on a $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.
   (c) On pose $f(c) = \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$ et $g(c) = 1 - 6c^2 + 12c^3$. Vérifier que $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$.
   (d) Déterminer les limites de $(a_n), (b_n), (c_n)$.
4. Quel scénario est le bon ?

Problème

Dans le plan, soit A, B, C trois points distincts tels que B soit sur le segment $[AC]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[AC]$, γ le cercle de diamètre $[BC]$, et Δ la tangente en B à γ.

On suppose donné un cercle γ' qui est tangent extérieurement à γ en D, tangent à Δ en E, et tangent intérieurement à Γ en F.

1. Justifier que les droites Δ et (CF) ne sont pas parallèles.
On note G leur point d'intersection.

2. Montrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme γ en Γ et une homothétie de centre F qui transforme Γ en γ'.

3. Déterminer les centres des homothéties qui transforment γ en γ'.

4. On note I le milieu de $[BE]$. Montrer que les points A, I, D sont alignés sur une droite orthogonale à (GD).

5. Montrer que $AB = GD$.

6. Exprimer le rayon r' de γ' en fonction des rayons R et r de Γ et γ.