ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique
et de la Formation des Cadres

Présidence
du Concours National Commun d'Accès
aux Écoles de Management (CNAEM)
ENCG d'Agadir

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'accès Aux Écoles de Management (CNAEM) (ENCG / ESI)

Session 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

FILIÈRES : **ECS**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :
L'épreuve se compose de trois problèmes indépendants.

PROBLÈME I

✧✧✧

Remarques :
Ce problème se compose de trois parties indépendantes.

1ère partie

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Montrer que les valeurs propres de A sont 3, $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
Justifier que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. Exprimer A^n en fonction de n.

5. On considère ici l'application $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \longmapsto {}^t XAX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

5.*a*. Justifier que q est une forme quadratique et exprimer $q((x, y, z))$ en fonction de x, y, z.

5.b. La forme quadratique q est-elle de signe constant ou change de signe ? Justifier votre réponse.

2$^{\text{ème}}$ partie

On note $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. **3.a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

3.c. Établir :

$$S_n \sim \ln(\ln(n))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \ et \ v_n = S_n - \ln(\ln n))$$

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5. **5.a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

5.b. En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

$3^{\text{ème}}$ partie

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0;+\infty[$.

On note $q = 1-p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad P(X=k \cap Y \leqslant t) = P(X=k)P(Y \leqslant t)$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \dfrac{Y}{X}$.

2.*a*. Montrer : $\forall t \in [0;+\infty[, \quad P(Z \geqslant t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y \geqslant tk)$

2.*b*. En déduire : $\forall t \in [0;+\infty[, \quad P(Z \geqslant t) = \dfrac{pe^{-\lambda t}}{1-qe^{-\lambda t}}$

2.*c*. Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

PROBLÈME II

✧✧✧

Dans tout ce problème n désigne un entier naturel non nul et $[|-n,n|]$ désigne les entiers relatifs de $-n$ à n. On notera par $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaison de k parmi n, soit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$1^{\text{ère}}$ partie

1. On définit

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}$$

1.*a*. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} - \binom{2n}{n}$$

1.*b*. Montrer que

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$$

.

2. on définit la suite (u_p) par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{p+1} & = & \dfrac{2p+1}{2p+2}u_p \end{cases}$$

2.*a*. Montrer, que , pour tout p entier naturel non nul, $u_p \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}$

2.*b*. Détermier $\lim_{p\to+\infty} u_p$.

2.*c*. Montrer, que , pour tout p entier naturel non nul, $u_p = \dfrac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$.

2$^{\text{ème}}$ partie

3. On étudie les variations, en unité, du nombre d'abonné d'un opérateur Telecom. On convient qu'une unité est de 100 abonnés.

On suppose que les variations mensuel sont indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le nombre correspondant au mois $j = 0$ début de l'observation, et on suppose que, chaque mois, le nombre d'abonné monte d'une unité (+1) avec une probabilité p $(0 < p < 1)$ ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1-p$.

On note X_{2n} le nombre d'abonnés constaté le $2n^{ième}$ mois suivant le début de l'observation. Par exemple, si $n = 3$ et que le nombre d'abonné a baissé les deux premiers mois et monté les autres mois, on a $X_6 = -1-1+1+1+1+1 = +2$.

3.*a*. Quelles sont les valeurs prises par X_6? Plus généralement, quelles sont les valeurs prises par X_{2n}?

3.*b*. On note Y_{2n} le nombre de mois (durant les $2n$ mois d'observation) où le nombre d'abonné a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où il a baissé.
Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n}et Z_{2n} ? Donner leurs espérances.

3.*c*. Quelles relations lient, d'une part n, Y_{2n}et Z_{2n}, et d'autre part X_{2n}, Y_{2n}et Z_{2n} ?
En déduire une expression de X_{2n} en fonction de Y_{2n}et de n.
Quelle est l'espérance de X_{2n} ? Que vaut-elle si $p = 1/2$?
Montrer que les valeurs de X_{2n}sont $\{2k, k \in [|-n, n|]\}$. (i.e. les valeurs paires de $-2n$ à $2n$)
Montrer que $\forall k \in [|-n, n|], \quad p(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$.

3.*d*. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$ et on note p_n la probabilité que le nombre d'abonné ait monté ou soit resté stable à l'issue de $2n$ mois d'observation.
Montrer que : $p_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}$. Que valent p_1, p_2, p_3?
Que se passe-t-il quand n devient grand ?

PROBLÈME III

✧✧✧

1ère partie

Soient a un réel strictement positif et X une va de loi uniforme sur $[0;2a]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ indépendant et identiquement distribué de même loi que X.

1. On pose $M_n = \max(X_1,\dots,X_n)$.

1.a. Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.

1.b. En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de a.

2. On pose $V_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ est aussi est un estimateur sans biais de a.

3. Entre U_n et V_n, quel estimateur choisir ?

2ème partie

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$, $J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$, $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ les intégrales I_n, J_n, K_n sont convergentes.
Quelle relation y a-t-il entre I_n, J_n, K_n ?

2. On note $L = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$

2.a. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} J_n - L = 0$

2.b. en déduire que $\lim_{n\to+\infty} J_n = \ln 2$

3. Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$: $0 \leqslant K_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,dt$

4. en déduire que $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$

5. Conclure sur $\lim_{n\to+\infty} I_n$

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE