ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur, de la formation des cadres et de la recherche scientifique	Présidence du Concours National d'Accès aux Écoles de Management CNAEM 2014

CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS

Aux Écoles de Management (CNAEM)

Session 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

FILIÈRES : **ECS**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :
L'épreuve se compose de deux exercices et deux problèmes indépendants.

EXERCICE 1

✧✧✧

Dans une gare de train, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la gare choisit le premier guichet avec une probabilité **p**, ou le deuxième guichet avec une probabilité $\mathbf{q} = \mathbf{1} - \mathbf{p}$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante. En une heure, le nombre **X** de personnes arrivés à la gare suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. On désigne par **Y** le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

1. Soient k et n deux entiers naturels. Exprimer la probabilité conditionnelle de $(Y = k)$ sachant que $(X = n)$ noté $P(Y = k|X = n)$.

2. En déduire la loi conjointe du couple (X, Y).

3. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 2

✧✧✧

Dans cet exercice , n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & si\ x < \theta \\ f(x) = e^{-(x-\theta)} & si\ x \geq \theta \end{cases} \quad \theta \textit{ est un réel strictement positive inconnu}$$

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On pose :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \textit{et} \ \ Z_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

1. **1.*a.*** Déterminer la fonction de répartition F de X puis reconnaître la loi de $X - \theta$. En déduire l'espérance et la variance de X.
   1.*b.* Montrer que $R_n = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ.

2. **2.*a*.** Déterminer la fonction de répartition de Z_n puis reconnaître la loi de $Z_n - \theta$.

2.*b*. Montrer que $T_n = Z_n - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ.

3. Calculer les variances de T_n et R_n . Que peut-on en conclure ?

4. On veut construire un estimateur S_n sans biais et convergent de θ, comme combinaison linéaire de T_n et R_n . On souhaite, de plus, que la variance de S_n soit la plus petite possible. On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de R_n et T_n , supposé constant, et on pose :

$$S_n = r_n R_n + t_n T_n$$

4-a Donner la valeur de $r_n + t_n$

4-b On pose $g(x) = (n+1-2\rho\sqrt{n})x^2 + 2(\rho\sqrt{n}-1)\, x + 1$

Montrer que g atteint son minimum en une valeur x_n à préciser.

4-c Écrire la variance de $V(S_n)$ de S_n en fonction de n et de $g(r_n)$

4-d Déterminer r_n puis t_n (en fonction de n et de ρ) afin que cette variance $V(S_n)$ soit minimale.

Vérifier que pour ses valeurs on a bien $V(S_n) \leq V(R_n)$ et $V(S_n) \leq V(T_n)$

PROBLÈME I

✧✧✧

Dans tout le problème A désigne la matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définit par

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1ère partie

1. Diagonalisation de A

1.*a*. Montrer que λ est une valeur propre de la matrice A si et seulement si λ est solution de l'équation :

$$6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$$

En déduire les valeurs propres de A.

1.*b*. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

1.*c*. Déterminer une matrice P appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec α, β, γ trois nombres réels tels que $\alpha > \beta > \gamma$.

Les coefficients de la dernière ligne de P *seront choisis égaux à* 1.

2. Calcul des puissances successives de A

2.*a*. Calculer P^{-1}. *Le détail des calculs devra figurer sur la copie.*

2.*b*. Démontrer que, pout tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

2.*c*. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n.

2^{ème} partie

Considérons les matrice Δ, B, Q et L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définient par

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer $Q^{-1}BQ$

4. Déterminer, par le calcul, une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = \Delta L' + Q^{-1}BQ$. On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls.

5. En déduire une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$

6. Étude d'une suite matricielle

Nous définissons la suite matricielle $(X_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B. \end{cases}$$

6.*a*. Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

6.*b*. Exprimer, pour tout entier naturel n, X_n en fonction de A, n, L et X_0.

6.*c*. *Dans cette question on prendra* $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Déterminer l'expression des coefficients de la matrice X_n et démontrer que chacun des coefficients a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME II

✧✧✧

Le but de ce problème est d'étudier, sur $]0,+\infty[$ la fonction définie par :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt$$

1ère partie

1. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt$ est convergente.

2. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle f(x)\geq e^{-1}\int_0^1\frac{1}{x+t}dt$.
En déduire la limite de $f(x)$, quand x tend vers 0 .

3. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $0\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$.
En déduire la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$ est convergente.

5. Montrer que $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle|f(x)-\tfrac{1}{x}|\leq\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$.
En déduire que $f(x)\sim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ ($f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$).

2ème partie

6. Soit $(x,h)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^{\star}$ tel que $h>-\frac{x}{2}$.

6.*a.* Montrer que l'integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ est convergente.

6.*b.* Établir :

$$\forall t\in]0,+\infty[\quad\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}$$

6.*c*. En déduire que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right|\leq\frac{2|h|}{x^3}$$

7. En déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$$

8. Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[$ et $\forall(\epsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$:

$$\int_\epsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\epsilon}}{x+\epsilon}-\int_\epsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt$$

9. En déduire que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=-\frac{1}{x}+f(x)$$

10. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f"(x)=\frac{1}{x^2}+f'(x)$$

11. On définie la fonction g sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}f(x)$

11.*a*. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad g'(x)=-\frac{e^{-x}}{x}$$

11.*b*. Démontrer que $\forall x\in]0,+\infty[$ l'intégral $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ est convergente.

11.*c*. En déduire que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad g(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\ \textit{puis que}\ f(x)=e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

11.*d*. Montrer que

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\ \sim_{x\to+\infty}\ \frac{e^{-x}}{x}\qquad\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\ \textit{est équivalent au voisinage de}\ +\infty\ \textit{à}\ \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

11.*e*. Quelle est la nature de la série $\sum n^2g(n)$

12. On pose $f(1)=a$

On considère la fonction h définit par :

$$\begin{cases} h(x) & = & 0 & si\ x<0\\ h(x) & = & \dfrac{1}{a}\dfrac{e^{-x}}{x+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$$

12.*a*. Montrer que la fonction h est une densité d'une variable aléatoire X

12.*b*. Montrer que X admet une espérance E(X) et calculer E(X) en fonction de a

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE