Concours CNAEM 2017 - Correction

Exercice 1
A propos de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on rappelle que sa densité est définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

1. Calculons l'espérance de X,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{A \to +\infty} [-xe^{-\lambda x}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx \quad \text{(par le changment de variable } u(x) = x, v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}) \\ &= \lim_{A \to +\infty} [\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^A \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Calculons la variance $V(X)$, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2}$. Calculons $E(X^2)$. On a par le théorème de transfère

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{A \to +\infty} [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^A + 2\int_0^A xe^{-\lambda x} dx \quad \text{(par le changment de variable } u(x) = x^2, v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}) \\ &= 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx \\ &= 2\frac{1}{\lambda} E(X) \quad \text{car } E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= 2\frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

D'où $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

2.

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leqslant x) &= \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3. On considère la variable aléatoire $Y = 1 + \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière du réel a.

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 0) &= P(1 + \lfloor X \rfloor \leqslant 0) \\ &= P(\lfloor X \rfloor \leqslant -1) = P(X < 0) = 0 \end{aligned}$$

Donc Y est à valeurs positives et puisque $\lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P(1+\lfloor X \rfloor = k) = P(\lfloor X \rfloor = k-1) \\ &= P(k-1 \leqslant X < k) \\ &= F(k) - F(k-1) = (1-e^{-\lambda k}) - (1-e^{-\lambda(k-1)}) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)} \end{aligned}$$

4. On considère la variable aléatoire $Z = \max(X_1, X_2)$.

4.1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in \{Z \leqslant x\} &\iff Z(\omega) \leqslant x \\ &\iff \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) \leqslant x \\ &\iff X_1(\omega) \leqslant x \text{ et } X_2(\omega) \leqslant x \\ &\iff \omega \in \{X_1 \leqslant x\} \bigcap \{X_2 \leqslant x\} \end{aligned}$$

D'où $\{Z \leqslant x\} = \{X_1 \leqslant x\} \bigcap \{X_2 \leqslant x\}$.

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \bigcap \{X_2 \leqslant x\}) \\ &= P(\{X_1 \leqslant x\})P(\{X_1 \leqslant x\}) \quad (\text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}) \\ &= P(X \leqslant x)^2 = F_X(x)^2 \quad (\text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivant la méme loi que } X) \\ &= \begin{cases} (1-e^{-x})^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est continue de classe C^1 saut peut être en 0, alors sa dérivé est une densité de Z qui définie par

$$f_Z(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.3.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)dx = \int_0^{+\infty} t2e^{-t}(1-e^{-t})dt \\ &= \int_0^{+\infty} t2e^{-t} - 2te^{-2t}dt \\ &= 2E(X) - \int_0^{+\infty} t2e^{-2t}dt \quad (\text{ car } E(X)\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \quad (\text{ car } \int_0^{+\infty} t2e^{-2t})dt \text{ c'est l'espérance de la loi exponentielle de paramètre 2}) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

5. On considère la variable aléatoire $T = \min(X_1, X_2)$.

5.1. $Z + T = X_1 + X_2$.

5.2. D'après la linéarité de l'espérance on a $E(Z+T) = E(Z) + E(T) = E(X_1) + E(X_2)$, donc

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2) - E(Z) = 1 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2

Étude d'une suite récurrente

Dans cet exercice, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12)$$

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0\lambda \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers $l \in \mathbb{R}$, donc puisque la fonction g est continue (car polynômial) alors
$$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(l)$$
d'où l est une solution d'équation $g(x) = x$. On va résoudre cet équation, on a
$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12) = x \\ &\iff \frac{1}{4}(3x^2 - 12x + 12) = 0 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$
D'où puisque l'équation admet 2 comme le seul solution, alors $l = 2$.

2. On suppose que $\lambda > 2$, soit $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= g(u_n) - u_n \\ &= \frac{1}{4}(3u_n^2 - 8u_n + 12) - u_n \\ &= \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour montrer qu'elle est strictement croissante, il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$. Par récurrence sur n, on a $u_0 = \lambda > 2$, soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 2$ et montrons que $u_{n+1} > 2$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$, implique que $u_{n+1} \geqslant u_n > 2$ (par l'hypothèse de récurrence). Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Remarque : Puisqu'on a $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$ pour tout élément initiale u_0. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. on a
$$\begin{aligned} u_1 = 2 &\iff f(\lambda) = 2 \\ &\iff \frac{1}{4}(3\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 2 \\ &\iff 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$
et puisque l'équation de seconde degré $3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ admet deux solution distinctes $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = 2$ (car sa discriminant $\delta = 16$). Donc d'après $(*)$ $u_1 = 2$ si, et seulement si, $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

4. On suppose que $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$. On étudie la fonction g, on a g est une fonction polynomiale de degré 2, alors la courbe représentative de g est une parabole de sommet $(\frac{4}{3}, g(\frac{4}{3})) = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ c'est-à-dire $\frac{5}{3}$ est un minimum global de g, de plus g est strictement convexe (car $g''(x) = \frac{3}{2} > 0$). On a $\lambda_1 < \frac{5}{3} < \lambda_2$ et $g(\lambda_1) = g(\lambda_2) = 2$. Donc $\forall x \in]\lambda_1, \lambda_2[$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $x = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2$, et puisque g est convexe alors $\frac{5}{3} \leqslant g(x) \leqslant \alpha g(\lambda_1) + (1 - \alpha)g(\lambda_2) = 2$. D'où $\forall x \in]\lambda_1, \lambda_2[$, on a $g(x) < 2$
Puis que $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, alors $u_1 = g(\lambda) < 2$, Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.
On a $u_0 < 2$ et si $u_n < 2$ alors $u_{n+1} = g(u_n) < 2$, donc on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$
D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante borner alors elle est convergente et d'après la question 1 sa limite est 2.

5. On suppose que $\lambda < \lambda_1 < \frac{4}{3}$. puisqu'on a g est strictement décroissant sur $]-\infty, \frac{4}{3}[$, alors $g(\lambda_1) = 2 < u_1 = g(\lambda)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_n = u_{n+1}$ est une sous-suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifier la condition de la question (2) car $v_0 = u_1 > 2$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Par conséquence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (car elle est croissante admet une sous-suite diverge vars $+\infty$).
6. Un premier calcul avec Scilab.
   - n =input('entrer la valeur de n')
   - $u = 1$
   - for $k = 1 : n$
   - $u = (3 * u * u - 8 * u + 12)/4$
   - end
   - disp(u)
7. Un deuxième calcul avec Scilab.
   Après exécution, le programme affiche le plus petit entier n, tel que $u_n > 1.9999$.

PROBLEME 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie 1
Définition et étude préliminaire

1.1. Soit x un réel strictement positif. Si $x \neq 1$, alors $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a donc deux cas possibles : pour $x \in]0,1[$, alors $0 < x^2 < x < 1$ implique que $[x^2, x] \subset]0,1[$ et pour $x \in]1,+\infty[$, alors $1 < x < x^2$ implique que $[x,^2 x] \subset]1,+\infty[$. D'où le segment d'extrémité x et x^2 est contenu dans $]01[$ ou bien dans $]1,+\infty[$.

1.2. La fonction $x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ est bien définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, c'est-à-dire que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ est convergent. On effet :
Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a d'après la question précédent le segment d'extrémités x et x^2 est contenu dans $]0,1[$ ou bien dans $]1,+\infty[$ et puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Alors en particulier elle est continue sur le segment d'extrémités x et x^2, d'où $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ est convergent.
▷ Dans la suite du problème, on note f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

1.3. **Étude de f sur l'intervalle** $]0,1[$.
On considère $x_0 \in]0,1[$ et une primitive g de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln t}$ sur cet intervalle.

1.3.1. Soit $x \in]0,1[$, on la fonction g est une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln t}$. Alors par définition de calcul d'intégrale on a $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = g(x^2) - g(x)$.

1.3.2. On a la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ car sa dérive est la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln t}$ qui continue sur $]0,1[$ puis que la fonction x$\longmapsto g(x^2)$ est classe $\mathscr{C}^1$ (composé). Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ comme somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et on a pour tout $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xg'(x^2) - g'(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{x-1}{\ln x}. \end{aligned}$$

1.3.3 On sait que $\forall x \in]0,1[$, $\ln x < 0$ et $x-1<0$ implique que $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} > 0$. Donc f' est strictement positive sur $]0,1[$.

1.4 **Étude de f sur l'intervalle** $]1,+\infty[$

De même raisonnement des questions (1.3.1) et (1.3.2), on a f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ et f' strictement positive car les fonctions $x \longmapsto x-1$ et $x \longmapsto$ les sont.

2$^{\text{ème}}$ Partie

Étude local et tracé du graphe de f

2.1. **Étude de f au voisinage de 0**

2.1.1. On a pour tout $x \in]0,1[$, $x^2 < x$ et $f(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}dt$. Soit $t \in [x^2, x]$, alors par la croissance de la fonction logarithme, on a $\ln t \leqslant \ln x \leqslant 0 \iff \frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 0$. On intègre ce dernière inégalité, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln x}dt \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t}dt \leqslant 0 &\iff 0 \leqslant -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t}dt \leqslant -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln x}dt (\text{multiplier par } -1)\\ &\iff 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x} = \frac{x(x-1)}{\ln x} \leqslant -\frac{x}{\ln x} \quad (\text{ car } -1 \leqslant x-1 \text{ et } \frac{1}{\ln x} < 0)\\ &\iff 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{-x}{\ln x}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite on a donc $0 \leqslant \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{\ln x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et puisque f est continue sur $]0,1[$ et admet une limite à droite en 0, alors elle se prolonge par continuité à droite de 0 par la fonction $x \longmapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

2.1.2. On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. On a par le continuité $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. D'après la question précédent , on a

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{-x}{\ln x} &\iff \forall x \in]0,1[, 0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{-1}{\ln x}\\ &\implies 0 \leqslant \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\ln x} = 0\end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droit en 0, et $f'(0) = 0$.

2.2. **Calcul d'un développement limite et de deux limites**

2.2.1. Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction ln au voisinage de 1 est :

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1) + (x-1)\ln'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}\ln''(1) + \circ((x-1)^2)\\ &= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \circ((x-1)^2) \quad (car \quad \ln'(1) = 1, \ln''(1) = -1)\end{aligned}$$

2.2.2. On a $\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1)^2)$, implique que $\frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1))$
On a le développement limité de $\frac{1}{X}$ d'ordre 1 en 1 est

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1))$$

Donc on applique la propriété de développement limité de composé de deux fonctions ($x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \frac{\ln x}{x-1}$), on a : au voisinage de 1 (avec $x \neq 1$)

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{\ln x} &= 1 - \left(-\frac{1}{2}(x-1)\right) + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1))\\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1)).\end{aligned}$$

On divise par $x-1$ ce qui donne que $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}(1)$.

2.2.3. On a $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ et d'après la question précédent on a $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1))$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1)) = \frac{1}{2}$.

2.3. **Étude de f au voisinage de 1**

2.3.1. On a d'après la question (2.2.3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$. Alors par définition de la limite on a :

$$\exists \alpha \in]0,1[\text{ tel que } \forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}, \left|\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 1 \quad \text{(on peut choisir } \alpha \text{ plut petit qu'on veut)}$$
$$\iff \exists \alpha \in]0,1[\text{ tel que } \forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}, \left|\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right| \leqslant \frac{3}{2}$$

2.3.2. Il suffit d'intégré l'inégalité de la question précédent sur le segment d'extrémités x et x^2 en étudiant les cas de $x < 1$ et $x > 1$, on trouve les résultats demander, et par passage à la limite on a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln 2$.

2.3.3. f noté encore la fonction obtenue par prolongement, $f(1) = \ln 2$. Montrons que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ d'après le théorème des accroissements finis, il existe y_x comprit entre 1 et x tel que

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(y_x)$$

puis que y_x comprit entre 1 et x, alors lorsque x tend vers 1, y_x ainsi tend vers 1. D'où

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{y\to 1\\ y\neq 1}} f'(y)$$

et d'après la question (2.3.1.), il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}, \left|\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right| \leqslant \frac{3}{2}$$

implique que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}, |f'(x) - 1| \leqslant \frac{3}{2}|x-1| \qquad \text{car } f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

par passage à la limite on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f'(x) = 1$, d'où

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$$

ce qu'exprime que la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

2.4. A voisinage de $+\infty$ la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique d'axe des y si, et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. Calculons cette limite. Puisque on a au voisinage de $+\infty$ alors on peut supposer que $x > 1$. On a $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$, ainsi

$$x \leqslant t \leqslant x^2 \iff \frac{1}{\ln x^2} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x}$$

donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln x^2} dt = \frac{x-1}{\ln x^2} \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

et puisqu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\ln x^2} = +\infty$ par croissance comparée. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. d'ou les résultats.

2.5. La tableau de variation de f. f est définie est continue sur $[0,+\infty[$, $f(0) = 0$, $f(1) = \ln 2$. et f strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (f' strictement positive sur ces intervalles), de plus $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 1$.

2.6. On a d'après les questions (1.3.2), (1.4), (2.1.2) et (2.3.3), $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ et $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Il suffit de montrer que $\forall x \in]0,1[$ on a $0 < \frac{x-1}{\ln x} < 1$, $\forall x \in]1,+\infty[, 1 < \frac{x-1}{\ln x}$, puis que f' est strictement croissant sur l'intervalle $]0,1[$ et sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
La dérivée de f est strictement croissante alors la fonction f est strictement convexe. Donc par conséquent le graphe ed f est au dessus de ces droits de tangents.

2.4. Le graphe de f (à partir de la tableau de variation).

3$^{\text{ème}}$ Partie
Application au calcul d'une intégrale généralisée

3.1. L'intégrale est impropre au voisinage en 1 et en 0. posons $h(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ la fonction $h$est continue sur $]0,1[$.
Première méthode : on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x\neq 1}} (1-t)^{\frac{1}{2}} h(x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x\neq 1}} h(x) = \frac{1}{2}$, donc $h(x) = \underset{x\to 1}{\circ}((1-x)^{\frac{-1}{2}})$, et on a, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} h(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$, donc $h(x) = \underset{x\to 0}{\circ}(x^{\frac{-1}{2}})$. et puisqu'on a les intégrale de Riemann $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx$ convergentes alors d'après le théorème de la négligeabilité on a $\int_0^1 h(t)dt$ est convergente.
Deuxième méthode : $a)$ En 1, on a d'après le question (2.2.2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x\neq 1}} h(x) = \frac{1}{2}$, alors h se prolonge par la continuité en 1. Alors l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)dt$ est convergente.
$b)$ De même en 0, $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0^+}} h(x) = 1$, alors h se prolonge par la continuité en 0. Alors l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt$ est convergente.
Du a et de b on a donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ est convergente.

3.2. Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, donc $dt = 2udu$ et si $t = y^2$(rsp $t = x^2$) implique que $u = y$(resp $u = x$). Donc par le théorème de changement de variable on a

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_y^x \frac{u}{\ln u} du.$$

On a

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt - \int_y^{y^2} \frac{1}{\ln t} dt \\
&= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt - \int_y^x \frac{1}{\ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt - \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{\ln t} dt \quad \text{(relation de chasles)} \\
&= \int_x^y \frac{1}{\ln t} dt - \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{\ln t} dt \quad \left(-\int_y^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^y \frac{1}{\ln t} dt\right) \\
&= \int_x^y \frac{1}{\ln t} dt - \int_x^y \frac{t}{\ln t} dt \\
&= \int_x^y \frac{1-t}{\ln t} dt.
\end{aligned}$$

3.3. D'après ce qui est précédé, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt &= \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 1}} \int_x^y \frac{t-1}{\ln t} dt \\
&= -\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 1}} f(x) - f(y) \\
&= f(1) - f(0) \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

PROBLEME 2

On considère la matrice réelle A d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

$1^{\text{ère}}$ Partie

Détermination d'un polynôme annulateur de A et ses valeurs propres

1.1 Recherche d'un polynôme annulateur de la matrice A.

1.1.1 $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $A^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.2 On a $3A + I = 3\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4A^3$

1.1.3 On a d'après la question précédent $4A^3 = 3A+I$, alors $4X^3-3X-1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

1.2 Etude des racines d'un polynôme.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = 4x^3 - 3x - 1$. Alors $R(1) = 4 - 3 - 1 = 0$, d'où 1 est une racine de R. On a de plus $R'(x) = 12x^2 - 3$ alors $R'(1) \neq 0$ donc 1 est une racine simple de R, on a de même $R(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^3 - 3(-\frac{1}{2}) - 1 = 0$ et $R'(-\frac{1}{2}) = 0$ donc $-\frac{1}{2}$ est une racine double de R.

1.3 On sais que l'ensemble de valeurs propres de A est contenant dans l'ensemble de racines de sa polynôme annulateur. Puis qu'on a d'après ce qui est précédé le polynôme R est un polynôme annulateur de A dont les racines sont $\{-\frac{1}{2}, 1\}$. Alors les valeurs propres possible de A sont $\{-\frac{1}{2}, 1\}$

1.4 On a $AV_1 = V_1$ donc V_1 est un vecteur propres de A associé à la valeur propre 1, de même on a $AV_2 = -\frac{1}{2}V_2$ donc V_2 est un vecteur propres de A associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.

1.5 On a d'après la question (1.3) et la question (1.4) que les valeurs propres de A sont exactement $\{-\frac{1}{2}, 1\}$.

$2^{\text{ème}}$ Partie

Calcul des puissances de la matrice A

2.1 Soit $n \geqslant 1$, par le division euclidienne de polynôme X^n sur le polynôme R alors il existe un polynôme Q_n (la quotient de la division euclidienne) et un polynôme R_n (le reste de la division euclidienne) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = Q_n(x)R(x) + R_n(x) \quad (*)$$

Où R_n de degré inférieur stricte au degré de R, et puis qu'on a $deg(R) = 3$ alors $deg(R_n) \leqslant 2$, donc il existe des a_n, b_n et c_n tels que $R_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$. D'où on a les résultats demander.

2.2 Détermination des réels a_n, b_n et c_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2.1 Dans l'équation $(*)$ on remplace x par 1 on trouve

$$1 = a_n + b_n + c_n \qquad \text{car } R(1) = 0 \quad [1]$$

de même en remplace x par $-\frac{1}{2}$ on a

$$(-\frac{1}{2})^n = a_n(-\frac{1}{2})^2 + b_n(-\frac{1}{2}) + c_n = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{2}b_n + c_n \quad [2]$$

2.2.2 On dérivant l'équation $(*)$ par rapport à x donne l'équation suivant

$$nx^{n-1} = Q_n'(x)R(x) + Q_n(x)R'(x) + 2a_nx + b_n$$

et en substituant $-\frac{1}{2}$ à x on trouve

$$n(-\frac{1}{2})^{n-1} = 2a_n(-\frac{1}{2}) + b_n = -a_n + b_n \quad [3]$$

car $R(-\frac{1}{2}) = R'(-\frac{1}{2}) = 0$.

2.2.3 Dans les équations [1], [2] et [3] on

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{2}b_n + c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -a_n + b_n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_n + c_n + n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \\ -\frac{1}{4}a_n + c_n = (1-n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = a_n + n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \frac{4}{9}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (3n-1)\right) \\ b_n = \frac{1}{9}\left(4 + (3n+2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ c_n = \frac{1}{9}\left(1 + (-4+3n)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \end{cases}$$

2.3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question (2.1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^k = Q_k(x)R(x) + a_kx^2 + b_kx + c_k$ et que le polynôme R est annulateur de A ($R(A) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$) Donc

$$A^k = Q_k(A)R(A) + a_kA^2 + b_kA + c_k = a_kA^2 + b_kA + c_k$$

et en remplaçant A^2, A, a_k, b_k et c_k pas ses expressions trouvais dans les questions 1.1.1 et 2.2.3 et en trouvant l'expression de A^k.

3ème Partie
Application à l'étude d'une marche aléatoire sur le net

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3.1 On $p_{1.3}$ la probabilité de se trouve sur la page 1 sachant qu'on était sur la page 3 qui égale à $\frac{1}{2}$
$p_{2.1}$ la probabilité de se trouve sur la page 2 sachant qu'on était sur la page 1 qui égale 0.
$p_{2.3}$ la probabilité de se trouve sur la page 2 sachant qu'on était sur la page 3 qui égale à $\frac{1}{2}$
$p_{3.1}$ la probabilité de se trouve sur la page 3 sachant qu'on était sur la page 2 qui égale à 1
Donc $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Soit $j \in \{1,2,3\}$, on a pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $P(A_n(i)) \neq 0$ et $p_{i,j} = P_{A_n(j)}(A_{n+1}(i))$. Donc

$$\begin{aligned} p_{1,j} + p_{2,j} + p_{3,j} &= P_{A_n(j)}(A_{n+1}(1)) + P_{A_n(j)}(A_{n+1}(2)) + P_{A_n(j)}(A_{n+1}(3)) \\ &= P_{A_n(j)}(A_{n+1}(1) \cup A_{n+1}(2) \cup A_{n+1}(3)) \\ &= P_{A_n(j)}(\Omega) \quad (\text{ car } \{A_{n+1}(1), A_{n+1}(2), A_{n+1}(3)\} \text{ forme un système complet d'événement}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, on on a pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $P(A_n(i)) \neq 0$ et $\{A_n(1), A_n(2), A_n(3)\}$ forme un système complet d'événement. Alors d'après la formule de probabilité total on a

$$\begin{aligned} p_{n+1}(1) = P(A_{n+1}(1)) &= P_{A_n(1)}(A_{n+1}(1))P(A_n(1)) + P_{A_n(2)}(A_{n+1}(1))P(A_n(2)) + P_{A_n(3)}(A_{n+1}(2))P(A_n(3)) \\ &= P_{1,1}p_n(1) + p_{1,2}p_n(2) + p_{1,3}p_n(3) \end{aligned}$$

3.4

$$\begin{aligned} p_{n+1}(2) &= P_{2,1}p_n(1) + p_{2,2}p_n(2) + p_{2,3}p_n(3) \\ &= \frac{1}{2}p_n(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(3) &= P_{3,1}p_n(1) + p_{3,2}p_n(2) + p_{3,3}p_n(3) \\ &= p_n(1) + \frac{1}{2}p_n(2) \end{aligned}$$

3.5 Pour tout entier naturel n on note $X_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}$.

3.5.1 On na

$$\begin{aligned} X_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1}(1) \\ p_{n+1}(2) \\ p_{n+1}(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{1,1}p_n(1) + p_{1,2}p_n(2) + p_{1,3}p_n(3) \\ P_{2,1}p_n(1) + p_{2,2}p_n(2) + p_{2,3}p_n(3) \\ P_{3,1}p_n(1) + p_{3,2}p_n(2) + p_{3,3}p_n(3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ P_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ P_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix} \\ &= BX_n = AX_n \end{aligned}$$

3.5.2 Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geqslant 1$, $X_n = A^n X_0$.
Pour $n = 0$ est satisfait. Supposons les résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons le pour $n+1$. D'après la question précédent et l'hypothèse de récurrence, on a : $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.
Donc par le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

3.5.3 On a d'après les questions précédents

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix} = A^nX_0$$

Où $X_0 = \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \end{pmatrix}$ et $A^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 2 + (-2+6n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 2 + (7-3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 2 - (2+3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 4 + (12-18n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 4 + (-24+9n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 4 + (3+9n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$
Alors précisément on a

$$\begin{cases} p_n(1) = \frac{1}{9}\left[(3 + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(1) + (3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(2) + (3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(3)\right] \\ p_n(2) = \frac{1}{9}\left[(2 + (-2+6n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(1) + (2 + (7-3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(2) + (2 - (2+3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(3)\right] \\ p_n(3) = \frac{1}{9}\left[(4 + (12-18n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(1) + (4 + (-24+9n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(2) + (4 + (3+9n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(3)\right] \end{cases}$$

3.6. Étude des suites $(p_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $j \in \{1,2,3\}$.

3.6.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$, car

$$\left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} ne^{n\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 0$$

3.6.2. on a $p_0(1) + p_0(2) + p_0(3) = P(A_0(1)) + P(A_0(2)) + P(A_0(3)) = P(A_0(1) \cup A_0(2) \cup A_0(3)) = 1$, car la famille $\{A_0(1), A_0(2), A_0(3)\}$.

3.6.3. D'après les questions (3.6.3), (3.6.1) et (3.6.2) on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(1) = \frac{1}{9}\lim\limits_{n\to+\infty}(3+6\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(1)+(3-3\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(2)+(3-3\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(3) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(2) = \frac{1}{9}\lim\limits_{n\to+\infty}(2+(-2+6n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(1)+(2+(7-3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(2)+(2-(2+3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(3) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(3) = \frac{1}{9}\lim\limits_{n\to+\infty}(4+(12-18n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(1)+(4+(-24+9n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0(2)+(4+(3+9n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n)p_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(1) = \frac{1}{9}(3p_0(1)+3p_0(2)+3p_0(3)) = \frac{1}{3} = l_1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(2) = \frac{1}{9}(2p_0(1)+2p_0(2)+2p_0(3)) = \frac{2}{9} = l_2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(1) = \frac{1}{9}(4p_0(1)+4p_0(2)+4p_0(3)) = \frac{4}{9} = l_3 \end{cases}$$

3.7 Comparaison de la popularité des trois sites.

3.7.1. On a $l_2 < l_1 < l3$, alors le site du plus visité est la page 3 et du moins visité est la page 2.

3.7.2. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} &= \lim_{n\to+\infty} X_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} AX_{n-1} \\ &= A\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors le vecteurs $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$ représente un vecteur propre de la matrice de transition associée au valeur propre 1.