CONCOURS NATIONAL D'ACCES AUX ECOLES DE MANAGEMENT

CNAEM 2017

Filière	**: ECS**
Epreuve de	**: Mathématiques et informatique**
Date	**: Mercredi 17 Mai 2017**
Heure	**: 8H à 12H**
Durée	**: 4H**

Notes à lire par le candidat

- **Chaque candidat n'a droit qu'à un seul « cahier d'épreuve ».**
- **Le candidat doit écrire son nom de famille, prénom, centre et numéro d'examen dans la partie réservée à ceci en haut de la 1ère page du cahier d'épreuve, avant de commencer à rédiger, pour valider sa feuille de composition.**
- **L'usage de toute machine (calculatrice, traductrice, etc.) ou dictionnaire est strictement interdit.**
- **Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.**

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECS, comporte 5 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux exercices et de deux problèmes indépendants entre eux.

Exercice 1
À propos de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$; on rappelle que sa densité f est définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \,; \\ 0 & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$

1. Calculer son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

2. Déterminer sa fonction de répartition notée F.

3. On considère la variable aléatoire $Y = 1 + \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière du réel a. Montrer que Y est presque sûrement à valeurs dans N^*, c-a-d $P(Y \leqslant 0) = 0$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$. Reconnaître la loi de Y.

Dans la suite de l'exercice, on considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant la même loi que X avec $\lambda = 1$.

4. On considère la variable aléatoire $Z = \max(X_1, X_2)$.

4.1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{Z \leqslant x\} = \{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\}$.

4.2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z ainsi qu'une densité de Z.

4.3. Calculer l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

5. On considère la variable aléatoire $T = \min(X_1, X_2)$.

5.1. Exprimer la variable aléatoire $Z + T$ en fonction de X_1 et X_2.

5.2. En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

Exercice 2
Étude d'une suite récurrente

Dans cet exercice, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12)$$

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est égale à 2.

2. On suppose que $\lambda > 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 < \lambda_2$, tels que $u_1 = 2$ si, et seulement si, $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

4. On suppose que $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

5. On suppose que $\lambda < \lambda_1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. Un premier calcul avec Scilab

On prend ici $\lambda = 1$. Recopier et compléter le programme Scilab ci-dessous pour qu'il calcule et affiche le terme u_n pour une valeur de n entrée au clavier.

```
n=input('entrer la valeur de n')
u= ...
for k=1:n
u= ...
end
disp(u)
```

7. Un deuxième calcul avec Scilab

On prend $\lambda = 1$ et on saisie le code suivant :

```
n=0
u=1
while u<=1,9999
u= (3*u*u-8*u+12)/4
n=n+1
end
disp(n)
```

Après exécution, quelle est la signification du résultat affiché par ce programme ?

Problème 1
Étude d'une fonction définie par une intégrale

1ère Partie
Définition et étude préliminaire

1.1. Soit x un réel strictement positif. Si $x \neq 1$, vérifier que le segment d'extrémités x et x^2 est contenu dans l'intervalle $]0,1[$ ou bien dans l'intervalle $]1,+\infty[$.

1.2. Justifier que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$, où ln désigne le logarithme népérien, est bien définie sur l'ensemble $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Dans la suite du problème, on note f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1.3. Étude de f sur l'intervalle $]0,1[$

On considère $x_0 \in]0,1[$ et une primitive g de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sur cet intervalle.

1.3.1. Vérifier que, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = g(x^2) - g(x)$.

1.3.2. Justifier que f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1[$ et que $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ pour tout $x \in]0,1[$.

1.3.3. Préciser le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.

1.4. Étude de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$

Montrer de même que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et préciser l'expression et le signe de sa dérivée sur cet intervalle.

2ème Partie
Étude locale et tracé du graphe de f

2.1. Étude de f au voisinage de 0

2.1.1. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

2.1.2. On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?

2.2. Calcul d'un développement limité et de deux limites

2.2.1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction ln au voisinage de 1.

2.2.2. Justifier alors que $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{o}(1)$.

2.2.3. En déduire que les fonctions f' et $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.

2.3. Étude de f au voisinage de 1

2.3.1. Justifier qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 3/2$.

2.3.2. En déduire que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|f(x) - \ln(1+x)\right| \leqslant \dfrac{3}{2}|x^2 - x|$ puis trouver la limite de f en 1.

2.3.3. On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. (*On pourra utiliser le théorème des accroissements finis*).

2.4. Étude de f au voisinage de $+\infty$

Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

2.5. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

2.6. Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Quelle conséquence géométrique cette propriété a-t-elle sur le graphe de f ?

2.7. Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).

3ème Partie
Application au calcul d'une intégrale généralisée

3.1. Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ est convergente.

3.2. Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de l'intervalle $]0,1[$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,du$ et en déduire que $\displaystyle f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t}\,dt$.

3.3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Problème 2

On considère la matrice réelle A d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1ère Partie
Détermination d'un polynôme annulateur de A et de ses valeurs propres

1.1. Recherche d'un polynôme annulateur de la matrice A

1.1.1. Calculer A^2 puis A^3.

1.1.2. Vérifier que $4A^3 = 3A + I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

1.1.3. En déduire un polynôme de degré 3 annulateur de la matrice A.

1.2. Étude des racines d'un polynôme

On considère le polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ R(x) = 4x^3 - 3x - 1.$$

Vérifier que 1 est une racine simple de R et en déduire que $-\frac{1}{2}$ en est une racine double.

1.3. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice A ? Justifier votre réponse.

1.4. Vérifier que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice A et préciser les valeurs propres aux quelles ils sont respectivement associé.

1.5. Préciser alors les valeurs propres de la matrice A.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Calcul des puissances de la matrice A

On rappelle que le polynôme R est défini par : $R(x) = 4x^3 - 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2.1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe un polynôme Q_n et des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = Q_n(x)R(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n. \qquad (*)$$

Dans la suite de cette partie, on cherche à déterminer, pour chaque entier $n \geqslant 1$, les réels a_n, b_n et c_n mais pas le polynôme Q_n.

2.2. Détermination des réels a_n, b_n et c_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Soit n un entier naturel non nul.

2.2.1. En substituant 1 puis $-\frac{1}{2}$ à x dans les deux membres de l'équation $(*)$ ci-dessus, en déduire deux équations linéaires vérifiées par les réels a_n, b_n et c_n.

2.2.2. En dérivant, par rapport à la variable x, les deux membres de l'équation $(*)$ ci-dessus et substituant $-\frac{1}{2}$ à x dans l'équation obtenue, en déduire une troisième équation linéaire vérifiée par les réels a_n, b_n et c_n.

2.2.3. Résoudre le système linéaire constitué des trois équations obtenues précédemment et donner les expressions des réels a_n, b_n et c_n en fonction de n.

2.3. Calcul des puissances de la matrices A

On admet que si P_1 et P_2 sont deux polynômes à coefficients réels, alors $(P_1P_2)(A) = P_1(A)P_2(A)$. Justifier que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A^k = a_k A^2 + b_k A + c_k I$ et déduire de ce qui précède que

$$A^k = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^k & 3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^k & 3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^k \\ 2 + (-2 + 6k)\left(\frac{-1}{2}\right)^k & 2 + (7 - 3k)\left(\frac{-1}{2}\right)^k & 2 - (2 + 3k)\left(\frac{-1}{2}\right)^k \\ 4 + (12 - 18k)\left(\frac{-1}{2}\right)^k & 4 + (-24 + 9k)\left(\frac{-1}{2}\right)^k & 4 + (3 + 9k)\left(\frac{-1}{2}\right)^k \end{pmatrix}.$$

$3^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une marche aléatoire sur le net

On considère le graphe ci-dessous modélisant un internet simplifié constitué de trois pages (ou sites) placées en ses sommets. Les arrêtes du graphe représentent les liens entres ces trois pages. L'algorithme du « Page Rank » consiste à surfer au hasard sur internet et à compter le nombre de fois qu'on passe sur chacune de ses page en fonction du temps.

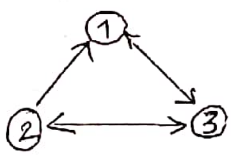

Figure 1 : Schéma du graphe.

Dans ce graphe, la page 1 possède un lien vers la page 3 mais n'a aucun lien vers la page 2 ; la page 2 possède un lien vers la page 1 et un vers la page 3 ; la page 3 possède un lien vers la page 1 et un vers la page 2.

Dans la suite de ce problème, on adopte les notations et les hypothèses suivantes où n désigne un entier naturel et i, j des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$:

- ✓ $p_n(j)$ désigne la probabilité que l'internaute soit sur la page j à l'instant $t = n$;
- ✓ $p_{i,j}$ désigne la probabilité de se trouver sur la page i à l'instant $t = n + 1$ sachant qu'on était sur la page j à l'instant $t = n$;
- ✓ $A_n(j)$ désigne l'événement "être sur la page j à l'instant $t = n$" ;
- ✓ on suppose que les événement $A_n(1)$, $A_n(2)$ et $A_n(3)$ ont chacun une probabilité **non nulle** ;
- ✓ on fait l'hypothèse qu'une page a une probabilité nulle de pointer sur elle même, c'est-à-dire que $p_{i,i} = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$;
- ✓ on suppose aussi qu'il y a équiprobabilité entre les liens d'une page ; ainsi, comme la page 2 pointe sur deux pages, la probabilité $p_{1,2}$ d'aller de la page 2 vers la page 1 vaut $\frac{1}{2}$, de même $p_{3,2} = \frac{1}{2}$.
- ✓ on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ dite matrice de transition dont le schéma de la figure 1 ci-dessus s'appelle graphe.

3.1. Compléter la matrice B en précisant les valeurs des réels $p_{1,3}$, $p_{2,1}$, $p_{2,3}$ et $p_{3,1}$.

3.2. Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, calculer la somme $p_{1,j} + p_{2,j} + p_{3,j}$ en justifiant votre réponse.

3.3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}(1) = p_{1,1}p_n(1) + p_{1,2}p_n(2) + p_{1,3}p_n(3)$ en précisant le théorème utilisé.

3.4. Donner, sans démonstration, les expressions de $p_{n+1}(2)$ et de $p_{n+1}(3)$ en fonction de $p_n(1)$, $p_n(2)$ et de $p_n(3)$.

3.5. Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice réelle à trois lignes et une colonne définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}.$$

3.5.1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

3.5.2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $X_n = A^n X_0$.

3.5.3. En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les valeur des probabilités $p_n(1)$, $p_n(2)$ et de $p_n(3)$ en fonction de n et des probabilités $p_0(1)$, $p_0(2)$ et $p_0(3)$.

3.6. Étude des suites $\left(p_n(j)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$

3.6.1. Préciser les limites des suites $\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.6.2. Préciser la valeur de la somme $p_0(1) + p_0(2) + p_0(3)$.

3.6.3. Déterminer les limites des suites $\left(p_n(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(p_n(2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(p_n(3)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on notera respectivement ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3.

3.7. Comparaison de la popularité des trois sites

3.7.1. Déduire de ce qui précède l'ordre des trois sites du plus visité au moins visité au fil du temps.

3.7.2. Que représente le vecteur $\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$ pour la matrice de transition ?

FIN DE L'ÉPREUVE