ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
قطاع التعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ENCG EL JADIDA
المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير - الجديدة
ECOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION

جامعة شعيب الدكالي
Université Chouaïb Doukkali

# Concours National d'Accès aux Ecoles de Management

## Présidence CNAEM 2020
### Edition 2020

Epreuve : **Mathématiques et Informatique**

Filière : ECS

Durée : 4h

**Note à lire par le candidat :**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.

L'usage de la calculatrice est interdit.



**Angle Avenue Ahmed chaouki et Rue de Fès B.P : 122 - 24000 El Jadida Maroc**

Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Remarques générales:**

L'épreuve se compose trois problèmes indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

## Problème 1

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à trois lignes et une colonne. Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Pour tous réels $a$ et $b$, on considère l'endomorphisme $f_{(a,b)}$ de l'espace vectoriel $E$ dont la matrice dans la base $\beta$ est donnée par :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 2a+7b & -2b & 4b \\ 12b & 2a-3b & 8b \\ -6b & 2b & 2a-3b \end{pmatrix}$$

On pose $F = \{M_{(a,b)};\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 12 & -3 & 8 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Partie 1
### Diagonalisation de la matrice $A$

1. a) Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Vérifier que $(I, A)$ est une base de $F$.
2. On considère les vecteurs de $E$ dans la base $\beta$ suivants : $e'_1 = (1, 2, -1)$, $e'_2 = (-1, 1, 2)$ et $e'_3 = (1, 1, -1)$.
   a) Vérifier que $e'_1$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $f_{(0,1)}$ associé à une valeur propre $\lambda_1$ que l'on précisera.
   b) Vérifier que $e'_2$ et $e'_3$ sont deux vecteurs propres de l'endomorphisme $f_{(0,1)}$ associés à une valeur propre $\lambda_2$ que l'on précisera.
3. Posons $\beta' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
   a) Vérifier que $\beta'$ est une base de $E$.
   b) Montrer que l'endomorphisme $f_{(0,1)}$ est diagonalisable.
   c) Déterminer $P$ la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\beta'$.
   d) Montrer qu'il existe une matrice diagonale notée $D$ à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.
4. a) Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, il existe une matrice diagonale notée $D_{(a,b)}$ à préciser telle $M_{(a,b)} = PD_{(a,b)}P^{-1}$.
   b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que $M_{(a,b)}$ soit inversible.
   c) Montrer que, dans le cas où $M_{(a,b)}$ est inversible, $M^{-1}_{(a,b)} = PD_{(a',b')}P^{-1}$ où $a'$ et $b'$ sont à préciser en fonction de $a$ et de $b$.
5. On pose, pour tout réel $a$, $M_a = M_{(a,a)}$ et $D_a = D_{(a,a)}$.
   a) Déterminer pour tout entier naturel $n$, $M_a^n$ en fonction de $P$, $D_a$ et $n$, justifier votre réponse.

b) i) Vérifier que $P^3 - P^2 - I = O$ et en déduire l'expression de la matrice $P^{-1}$.
ii) En déduire pour tout entier naturel $n$, l'expression de $M_a^n$ sous la forme d'un tableau en fonction de $a$ et $n$.

c) Déterminer, dans le cas où $M_a$ est inversible, l'expression de $M_a^{-1}$ sous la forme d'un tableau en fonction de $a$.

### Partie 2
### Application à un système de suites

On considère les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ qui sont définies par les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $z_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{4}x_n - \frac{1}{2}y_n + z_n + \frac{1}{4} \\ y_{n+1} = 3x_n - \frac{1}{4}y_n + 2z_n + \frac{3}{2} \\ z_{n+1} = \frac{-3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{4}z_n \end{cases}.$$

On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, il existe un réel $a_0$ à préciser, tel que $X_{n+1} = M_{a_0}X_n + B$.
2. ~~Écrire un programme scilab qui affiche la matrice $X_n$, l'entier $n$ étant donné par l'utilisateur.~~
3. On se propose de trouver la matrice colonne $U$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $U = M_{a_0}U + B$.
   a) Vérifier que $I - M_{a_0} = M_{(\frac{1}{2}-a_0,-a_0)}$.
   b) En déduire que la matrice $I - M_{a_0}$ est inversible et calculer son inverse.
   c) En déduire la valeur de la matrice colonne $U$.
4. a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} - U = M_{a_0}(X_n - U)$.
   b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $X_n - U = (M_{a_0})^n(X_0 - U)$.
5. Déterminer pour tout entier naturel $n$, les expressions de $x_n$ , $y_n$ et $z_n$, en fonction de $n$, (on utilisera l'expression de $(M_a)^n$ obtenue dans la question 5. b) ii) de la partie 1).
6. Montrer que les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont convergentes et déterminer la limite de chacune.

## Problème 2

Dans tout le problème, $a$ **désigne un réel strictement positif** et $f_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{a}e^{\frac{-x^2}{a}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

### Partie 1
### Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Montrer que $f_a$ est une densité de probabilité.
   **Par la suite, on considère la variable aléatoire notée $X_a$ admettant $f_a$ comme densité.**
2. Déterminer la fonction de répartition $F_{X_a}$ de la variable aléatoire $X_a$.
3. On considère la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ définie de la façon suivante, pour tout entier naturel non nul $k$,
   $u_k = P\left(\sqrt{a\ln(k)} \leq X_a \leq \sqrt{a\ln(k+1)}\right)$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série convergente et déterminer sa somme.

4. Soit $Z_a$ la variable aléatoire réelle définie par $Z_a = X_a^2$.

a) Montrer que $Z_a$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ à préciser en fonction de $a$.

b) Écrire un programme scilab simulant la variable aléatoire $X_a$, qui renvoie une matrice à une ligne et mille colonnes contenant mille réalisations de $X_a$, le réel $a$ strictement positif étant donné par l'utilisateur. (On rappelle que la commande rand(m, n, 'exp', $\frac{1}{\lambda}$) génère une matrice à m lignes et n colonnes dont les coefficients sont les réalisations d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda$).

5. a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{a}} dx = \frac{\sqrt{a\pi}}{2}$, (on pourra faire un changement de variable convenable).

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, tel que $n \geq 2$ et pour tout réel positif $x$,

$$\int_0^x t^n e^{\frac{-t^2}{a}} dt = \frac{-a}{2} x^{n-1} e^{\frac{-x^2}{a}} + (n-1)\frac{a}{2} \int_0^x t^{n-2} e^{\frac{-t^2}{a}} dt$$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, tel que $n \geq 2$,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{\frac{-x^2}{a}} dx = (n-1)\frac{a}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{\frac{-x^2}{a}} dx$$

6. a) Montrer que $X_a$ admet une espérance $E(X_a)$ que l'on déterminera en fonction de $a$.

b) Montrer que $X_a$ admet une variance $V(X_a)$ que l'on déterminera en fonction de $a$.

### Partie 2
### Étude de deux suites de variables aléatoires à densité

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ qui suivent la même loi que $X_a$. On pose pour tout entier naturel non nul $n$, $S_n = \frac{4}{n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et $T_n = \inf(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

1. a) Déterminer l'espérance $E(S_n)$ de la variable aléatoire $S_n$ en fonction de $a$.

b) Déterminer la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire $S_n$ en fonction de $n$ et de $a$.

2. a) Montrer que pour tout réel $x$ positif, $P(T_n > x) = e^{-n\frac{x^2}{a}}$.

b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_n$.

c) En déduire une densité de la variable aléatoire $T_n$.

d) Déterminer l'espérance $E(T_n)$ de la variable aléatoire $T_n$ en fonction de $n$ et de $a$.

e) Déterminer la variance $V(T_n)$ de la variable aléatoire $T_n$ en fonction de $n$ et de $a$.

3. Écrire un programme scilab qui détermine la plus petite valeur non nulle de $n$, telle que $P(T_n > x) \leq 10^{-5}$, les réels positifs $a$ et $x$ sont donnés par l'utilisateur.

## Problème 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle la fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'elle existe, la fonction $G_X$ définie par : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$.

### Partie 1
### Exemples classiques de fonctions génératrices

1. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0, 1[$, la série $\sum_{n\geq 0} t^n$ est convergente et déterminer sa somme.

b) En déduire que pour tout réel $t$ de l'intervalle $]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)t^n$ est convergente.

c) Est ce que la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)t^n$ est convergente pour $t=1$? justifier votre réponse.

2. Déterminer la fonction génératrice $G_X$, en précisant le domaine de définition, dans chacun des cas suivants :

a) $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0,1]$.

b) $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$, $p$, notée $\mathcal{B}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$.

c) $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, notée $\mathcal{G}(p)$, où $p \in ]0,1[$.

## Partie 2
## Une propriété de la fonction génératrice sur un exemple

On définit la variable aléatoire réelle $Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ à partir de la relation suivante : $P(Y=0) \neq 1$ et il existe un réel strictement positif $a$ tel que pour tout entier naturel non nul $k$, $P(Y=k) = \frac{1}{2}(1+\frac{a}{k})P(Y=k-1)$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = (1+a)\sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k) - nP(Y=n)$$

b) En déduire que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} kP(Y=k)\right)_{n\geq 1}$ est majorée.

c) En déduire que $Y$ admet une espérance $E(Y)$ et préciser sa valeur en fonction de $a$.

2. **Par la suite**, on notera pour tout entier naturel $k$, $p_k = P(Y=k)$. Soit $\varphi_a$ la fonction définie sur $]-2,2[$ par $\varphi_a(x) = p_0 2^{(a+1)}(2-x)^{-(a+1)}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $k$ et pour tout réel $x$ dans $]-2,2[$, $\varphi_a^{(k)}(x) = k! p_k 2^{(a+k+1)}(2-x)^{-(a+k+1)}$, où $\varphi_a^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$de la fonction $\varphi_a$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $x$ dans $]-2,2[$,

$$\varphi_a(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)2^{a+n+2} p_{n+1} \int_0^x (2-t)^{-(a+n+2)}(x-t)^n dt$$

c) Vérifier que pour tout $x$ dans $[0,1]$ et pour tout $t$ dans $[0,x]$, $0 \leq \dfrac{x-t}{2-t} \leq \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x$ dans $[0,1]$,

$$0 \leq \int_0^x (2-t)^{-(a+n+2)}(x-t)^n dt \leq \frac{1}{2^n}\int_0^x (2-t)^{-(a+2)} dt$$

3. a) Montrer que pour tout réel $x$ dans $[0,1]$, $G_Y(x) = p_0 2^{(a+1)}(2-x)^{-(a+1)}$.

b) En déduire $p_0$ en fonction de $a$, (on pourra calculer $G_Y(1)$).

c) Vérifier que $G_Y'(1) = E(Y)$.

d) Écrire un programme scilab, dans la cas où $a=1$, permettant d'obtenir la courbe représentative de la fonction $G_Y$ sur $[0,1]$.

**FIN DE L'ÉPREUVE**

★ ★ ★ ★ ★