Corrigé CNAEM 2014

Exercice 1

1) T est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc elle est inversible.

Pour déterminer son inverse on va utiliser la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_3 \quad \textit{et} \quad \mathrm{L}_1 \longleftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \longleftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$$

Donc T est inversible et $\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Calculons T^2

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Vérifions, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- ✓ Pour n=0 : $T^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la relation est vraie pour n=0.

- ✓ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$T^{n+1} = T^nT = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & (n+1)^2 \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la relation reste vraie pour n+1.

- ✓ Par le principe de la récurrence on conclut donc que

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Calculons PQ

$$PQ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc P est inversible et son inverse est : $P^{-1} = Q$

5) Calculons PTQ.

$$\mathrm{PT}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PTQ}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&1&-3\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PTQ}=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\-6&4&-5\\2&-1&2\end{pmatrix}=\mathrm{A}$$

6) A=PTQ Donc A est inversible car elle est produit de matrices inversibles.

$\mathrm{A}^{-1}=(\mathrm{PTQ})^{-1}=((\mathrm{PT})\mathrm{Q})^{-1}=\mathrm{Q}^{-1}(\mathrm{PT})^{-1}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{P}^{-1}$

Donc $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{PT}^{-1}\mathrm{Q}$

7) A=PTQ Donc par une simple récurrence on montre que :

$\forall\ \mathrm{n}\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^{\mathrm{n}}=\mathrm{PT}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}$

8) Soit n un entier naturel. Calculons A^{n}.

$$\mathrm{PT}^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&n^2\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+1&n^2+2n-2\\2&2n+1&2n^2+2n-1\\0&-1&-2n+1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PT}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&n+1&n^2+2n-2\\2&2n+1&2n^2+2n-1\\0&-1&-2n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&1&-3\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{A}^{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2n^2-6n+2&n^2+3n&-n^2-5n\\-4n^2-8n&2n^2+4n+2&-2n^2-8n\\4n&-2n&2n+2\end{pmatrix}$

9) a) Soit n un entier naturel.

$$AX_n=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\-6&4&-5\\2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{a_n}\\\mathrm{b_n}\\\mathrm{c_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\mathrm{a_n}+2\mathrm{b_n}-3\mathrm{c_n}\\-6\mathrm{a_n}+4\mathrm{b_n}-5\mathrm{c_n}\\2\mathrm{a_n}-\mathrm{b_n}+2\mathrm{c_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{a_{n+1}}\\\mathrm{b_{n+1}}\\\mathrm{c_{n+1}}\end{pmatrix}=X_{n+1}$$

Donc par une simple récurrence on montre que :

$\forall\ \mathrm{n}\in\mathbb{N}\quad X_n=\mathrm{A}^{\mathrm{n}}X_0$

9) b)

$$\mathrm{A}^{\mathrm{n}}X_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2n^2-6n+2&n^2+3n&-n^2-5n\\-4n^2-8n&2n^2+4n+2&-2n^2-8n\\4n&-2n&2n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$A^n X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4n^2-20n+2 \\ -8n^2-32n+4 \\ 8n+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n^2-10n+1 \\ -4n^2-16n+2 \\ 4n+4 \end{pmatrix}$$

Or $A^n X_0 = X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n^2-10n+1 \\ -4n^2-16n+2 \\ 4n+4 \end{pmatrix}$

Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_n &= -2n^2-10n+1 \\ b_n &= -4n^2-16n+2 \\ c_n &= 4n+4 \end{cases}$

Corrigé exercice 2 :

1) a) On a $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}ln2$

b) $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Donc $I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2}(1-ln2)$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in [0\,,1]$ $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geq 0$. Donc $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx \geq 0$

Ainsi I_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}+x^{2n+3}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1+x^2)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n+1}dx$

Donc $I_n + I_{n+1} = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2-a) $I_{n+1} \geq 0$ Donc $I_n + I_{n+1} \geq I_n$

Ce qui prouve que $\frac{1}{2n+2} \geq I_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n \leq \frac{1}{2n+2}$

d) D'après ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$ Donc par passage à la limite on conclut par le théorème des gendarmes que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

e) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$

Pour $n = 1$. La formule est vraie puisque $2I_1 = 1 - ln2$

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$

$$2(-1)^n I_{n+1} = 2(-1)^n\left(\frac{1}{2n+2} - I_n\right) = \frac{2(-1)^n}{2n+2} - 2(-1)^n I_n$$

$$2(-1)^n I_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$$

Ainsi la formule reste vraie pour n+1.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$

f) On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$. Alors par passage à la limite on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = ln2.$

3) a) Calculons $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$

On pose $\begin{cases} u'(x) = x^{2n+1} \\ v(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ $\quad Alors \quad$ $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2n+2}x^{2n+2} \\ v'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{cases}$

Une intégration par partie nous donne :

$$I_n = \left[\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx$$

$Donc \qquad I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in [0\,,1] \quad \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} \geq 0$. Donc $\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \geq 0$

Et on a aussi $\forall x \in [0\,,1] \quad 1 + x^2 \leq (1+x^2)^2$

Donc $\forall x \in [0\,,1] \quad \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} \leq \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}$ Alors $\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}dx = I_{n+1}$

Or d'après la question 2-c) $I_{n+1} \leq \frac{1}{2n+4}$ Donc $\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{2n+4}$

Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{2n+4}$

c) D'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \frac{n}{(n+1)(2n+4)}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{(n+1)(2n+4)} = 0$

Donc selon le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx = 0$

Et on a : $nI_n = \frac{n}{4(n+1)} + \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4}$

Donc par passage à la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$

4) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$ Donc I_n est équivalent à $\frac{1}{4n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Et puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$ est équivalent à $\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé exercice 3 :

1) Soit $i \in [\![1\,;4]\!]$, X_i représente le nombre de succès (Avoir une boule numérotée i dont la probabilité est égale à $\frac{1}{4}$) dans k épreuves identiques et indépendantes.

Donc X_i suit la loi binomiale $X_i \backsim \mathcal{B}\left(k\,,\frac{1}{4}\right)$

Ainsi $\begin{cases} X_i(\Omega) = [\![0\,;k]\!] \\ \forall p \in [\![0\,;k]\!] \;\; P(X_i = p) = C_k^p \left(\frac{1}{4}\right)^p \left(\frac{3}{4}\right)^{k-p} \end{cases}$

Connaissant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale on conclut que : $E(X_i) = \frac{k}{4}$ et $V(X_i) = \frac{3k}{16}$.

2) Indépendances des variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 :

Soient $(i, j) \in [\![1\,;4]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Il est clair qu'on ne peut pas avoir simultanément la boule numéro i k fois et la boule numéro j k fois. On traduit ceci en terme de probabilité par :

$P\left((X_i = k) \cap (X_j = k)\right) = 0$

Mais on sait que $P(X_i = k)P(X_j = k) = \left(\frac{1}{4}\right)^p \left(\frac{1}{4}\right)^p \neq 0$

Il en résulte que les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Donc les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 ne sont pas indépendantes.

3) a) $X_i + X_j$ représente le nombre de succès (Avoir une boule numérotée i ou avoir une boule numérotée j dont la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$) dans k épreuves identiques et indépendantes.

Donc $X_i + X_j$ suit la loi binomiale $X_i + X_j \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(k\,, \frac{1}{2}\right)$

Ainsi $\begin{cases} (X_i + X_j)(\Omega) = [\![0\,;k]\!] \\ \forall p \in [\![0\,;k]\!] \;\; P(X_i + X_j = p) = C_k^p \left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2}\right)^{k-p} = C_k^p \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{cases}$

3) b) Connaissant la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale on a alors $V(X_i + X_j) = \frac{k}{4}$.

Et on sait que $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2cov(\,X_i,\, X_j)$

Donc $cov(\,X_i,\, X_j) = \frac{1}{2}(V(X_i + X_j) - V(X_i) + V(X_j))$

Donc $cov(\,X_i,\, X_j) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{4} - \frac{3k}{16} - \frac{3k}{16}\right) = -\frac{k}{16}$.

4) *On a* $\mathrm{Z}_1(\Omega) = \{1\}$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_1 = 1) = 1$ *et* $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_1) = 1$.

Et on a : $\mathrm{Z}_2(\Omega) = \{1, 2\}$

Et $\begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_2 = 1) = 4 \times \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{4} \\ \mathrm{P}(\mathrm{Z}_2 = 2) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$ *Et* $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_2 = 1) + 2\mathrm{P}(\mathrm{Z}_2 = 2) = \frac{7}{4}$

5)a) *Soit* k un entier supérieur ou égale à 1.

$$P(Z_k = 1) = 4 \times \frac{1^k}{4^k} = \frac{1}{4^{k-1}}$$

5) b) Déterminons $P(Z_k = k)$

$P(Z_1 = 1) = 1$

$P(Z_2 = 2) = \frac{3}{4}$

$P(Z_3 = 3) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(Z_4 = 4) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

Si $k \geq 5$ alors $P(Z_k = k) = 0$ Car on ne peut pas avoir plus de 4 numéros distincts.

5) c) Soit $j \in [\![1\,;4]\!]$

$P(Z_{k+1} = j) = P(Z_k = j)P_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = j) + P(Z_k = j-1)P_{(Z_k=j-1)}(Z_{k+1} = j)$

Or $P_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = j) = \frac{j}{4}$ Car elle correspond à l'événement « choisir , lors du $(k+1)^{\text{ième}}$ tirage une boule déjà choisie lors des tirages précédents ».

Et $P_{(Z_k=j-1)}(Z_{k+1} = j) = \frac{4-(j-1)}{4}$. Car elle correspond à l'événement « choisir , lors du $(k+1)^{\text{ième}}$ tirage une boule non choisie lors des tirages précédents ».

Donc $P(Z_{k+1} = j) = \frac{j}{4}P(Z_k = j) + \frac{5-j}{4}P(Z_k = j-1)$.

5) d) Montrons que $E(Z_{k+1}) = \frac{3}{4}E(Z_k) + 1$

On a $\frac{3}{4}E(Z_k) + 1 = \frac{3}{4}(P(Z_k = 1) + 2P(Z_k = 2) + 3P(Z_k = 3) + 4P(Z_k = 4)) + 1$

Et puisque $1 = P(Z_k = 1) + P(Z_k = 2) + P(Z_k = 3) + P(Z_k = 4)$

$$\frac{3}{4}E(Z_k) + 1 = \frac{7}{4}P(Z_k = 1) + \frac{5}{2}P(Z_k = 2) + \frac{13}{4}P(Z_k = 3) + 4P(Z_k = 4)$$

D'un autre côté :

$E(Z_{k+1}) = P(Z_{k+1} = 1) + 2P(Z_{k+1} = 2) + 3P(Z_{k+1} = 3) + 4P(Z_{k+1} = 4)$

Et on a d'après la question 5-c)

$$P(Z_{k+1}=1)=\frac{1}{4}P(Z_k=1)+\frac{5-1}{4}P(Z_k=0)=\frac{1}{4}P(Z_k=1)$$

$$P(Z_{k+1}=2)=\frac{2}{4}P(Z_k=2)+\frac{5-2}{4}P(Z_k=2-1)$$

$$P(Z_{k+1}=2)=\frac{1}{2}P(Z_k=2)+\frac{3}{4}P(Z_k=1)$$

$$P(Z_{k+1}=3)=\frac{3}{4}P(Z_k=3)+\frac{5-3}{4}P(Z_k=3-1)$$

$$P(Z_{k+1}=3)=\frac{3}{4}P(Z_k=3)+\frac{1}{2}P(Z_k=2)$$

$$P(Z_{k+1}=4)=\frac{4}{4}P(Z_k=4)+\frac{5-4}{4}P(Z_k=4-1)$$

$$P(Z_{k+1}=4)=P(Z_k=4)+\frac{1}{4}P(Z_k=3)$$

Ainsi on obtient :

$$E(Z_{k+1})=\frac{7}{4}P(Z_k=1)+\frac{5}{2}P(Z_k=2)+\frac{13}{4}P(Z_k=3)+4P(Z_k=4)$$

Ce qui prouve que $E(Z_{k+1})=\frac{3}{4}E(Z_k)+1$.

6) Montrons que la suite (v_n) définie par $v_k=E(Z_k)-4$ est une suite géométrique.

$$v_{k+1}=E(Z_{k+1})-4=\frac{3}{4}E(Z_k)+1-4=\frac{3}{4}E(Z_k)-3$$

Donc $v_{k+1}=\frac{3}{4}(E(Z_k)-4)=\frac{3}{4}v_k$

Il en résulte que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Et son premier terme est $v_1=E(Z_1)-4=1-4=-3$

7) $P(Z_k\geq 5)=0$ Car on dispose uniquement de 4 boules distinctes, donc on ne peut pas obtenir 5 numéros distincts ou plus, au cours des k premiers tirages.

8) Montrons que $P(Z_k=2)=6\ \frac{2^k-2}{4^k}$.

On va procéder par récurrence sur k.

- $P(Z_1 = 2) = 6\ \frac{2^1-2}{4^1} = 0$ Donc la formule est vraie pour k = 1

- On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $P(Z_k = 2) = 6\ \frac{2^k-2}{4^k}$.

$$P(Z_{k+1} = 2) = \frac{2}{4}\mathrm{P}(\mathrm{Z_k} = 2) + \frac{5-2}{4}\mathrm{P}(\mathrm{Z_k} = 2-1)$$

$$P(Z_{k+1} = 2) = \frac{2}{4}\mathrm{P}(\mathrm{Z_k} = 2) + \frac{3}{4}\mathrm{P}(\mathrm{Z_k} = 1)$$

$$P(Z_{k+1} = 2) = \frac{2}{4}6\ \frac{2^k-2}{4^k} + \frac{3}{4}\frac{1}{4^{\mathrm{k}-1}} = \frac{3 \times 2^k - 6 + 3}{4^k} = \frac{12 \times 2^k - 12}{4^{k+1}}$$

Donc $P(Z_{k+1} = 2) = 6\ \frac{2^{k+1}-2}{4^{k+1}}$

Donc la formule reste vraie pour k+1.

Il en résulte par le principe de la récurrence que pour tout entier $k \geq 1$ on a :

$P(Z_k = 2) = 6\ \frac{2^k-2}{4^k}$.

<u>Corrigé exercice 4 :</u>

1) Etudions les variations de f sur $[0\,,+\infty[$.

Soit $x \in [0\,,+\infty[$

f est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} - \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}} = (1-\mathrm{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$.

Ainsi le signe de $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ sur $[0\,,+\infty[$ est celui de $(1-\mathrm{x})$.

Donc $\begin{cases} \mathrm{f}'(\mathrm{x}) \geq 0 & \text{si } 0 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ \mathrm{f}'(\mathrm{x}) \leq 0 & \text{si } \mathrm{x} \geq 1 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} \text{f est croissante sur } [0\,;1] \\ \text{f est décroissante sur } [0\,;\ +\infty[\end{cases}$

2) Déterminons la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\mathrm{x} \to +\infty} \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}} = \lim\limits_{\mathrm{t} \to -\infty} (-\mathrm{t})\mathrm{e}^{\mathrm{t}} = 0$ (par changement de variable $\mathrm{t} = -\mathrm{x}$).

3) On résume ces résultats dans le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		0	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4) a) calculons l'intégrale $\int_0^a xe^{-x}dx$.

On pose $\begin{cases} u'(t) = e^{-x} \\ v(t) = x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(t) = -e^{-x} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

Une intégration par partie nous donne :

$$\int_0^a xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^a + \int_0^a e^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^a + [-e^{-x}]_0^a = -ae^{-a} - e^{-a} + 1$$

4) b) Déterminons $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx$

On a donc : $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} - ae^{-a} - e^{-a} + 1 = 1$

5) Montrons que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

- ✓ Positivité de la fonction f :

$\forall x \in]-\infty\,;0[\quad f(x) \geq 0$ (Car f est nulle sur $]-\infty\,;0[$).

$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\begin{cases} x \geq 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$ Donc $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\quad f(x) \geq 0$.

Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

- ✓ Continuité de f :

La fonction nulle est continue sur $]-\infty\,;0[$.

La fonction $x \to xe^{-x}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ (Comme produit de fonctions continues).

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ (Sauf peut-être en 0).

- ✓ Convergence de l'intégrale

On a $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx = 1$ Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Et puisque f est la fonction nulle sur $]-\infty\,,0[$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et vaut 0.

Il en résulte que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Ces trois points qu'on vient de démontrer prouve que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

6) Calculons l'espérance E(X) de X.

calculons l'intégrale $\int_0^a x^2e^{-x}dx$.

On pose $\begin{cases} u'(t) = e^{-x} \\ v(t) = x^2 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(t) = -e^{-x} \\ v'(t) = 2x \end{cases}$

Une intégration par partie nous donne :

$$\int_0^a x^2e^{-x}dx = [-x^2e^{-x}]_0^a + 2\int_0^a xe^{-x}dx = -a^2e^{-a} + 2(-ae^{-a} - e^{-a} + 1)$$

Donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a xf(x)dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a x^2e^{-x}dx$

Donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a xf(x)dx = \lim\limits_{a \to +\infty} - a^2e^{-a} + 2(-ae^{-a} - e^{-a} + 1) = 2$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge et vaut 2.

Et puisque f est la fonction nulle sur $]-\infty\,,0[$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ converge et vaut 0.

Il en résulte que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2$.

Donc $E(X) = 2$