CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS

Aux Écoles de Management

(CNAEM)

Session 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

FILIÈRE : **ECT**

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -6 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice T est inversible et calculer la matrice inverse T^{-1}.

2) Calculer T^2.

3) Vérifier, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Calculer le produit, PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

5) Calculer PTQ.

6) En déduire que A est inversible et calculer son inverse en fonction de P, T^{-1} et Q (on ne vous demande pas de donner l'expression de A^{-1}).

7) Donner l'expression de A^n en fonction de n, P, Q et T^n.

8) Pour tout entier naturel *n,* calculer les coefficients de la matrice A^n en fonction de *n* uniquement.

9) On considère trois suites $(a_n), (b_n)\ et\ (c_n)$ définies par des conditions initiales $a_0, b_0\ et\ c_0$ et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = -3a_n + 2b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = -6a_n + 4b_n - 5c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

a) Reconnaître, pour tout entier naturel *n,* le produit AX_n.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices $A^n\ et\ X_0$ et de l'entier naturel *n.*

b) En déduire l'expression des suites $(a_n), (b_n)\ et\ (c_n)$ en fonction de n uniquement dans le cas où $a\ = 1;\ b\ = 2\ et\ c\ = 4$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$

1) a) Calculer I_0

b) Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_1.

2 a) Quel est le signe de I_n?

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ I_n \leq \frac{1}{2n+2}$

d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

e) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$$

f) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

3 a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx$$

b) Etablir les inégalités : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{2n+4}$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

4) A l'aide des questions précédentes, donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - ln2$

quand n tend vers $+\infty$.

<u>**Exercice 3**</u>

On considère une urne U contenant 4 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne U.

$[\![1\,;4]\!]$ Désignera les entiers naturels i tel que $1 \leq i \leq 4$. C'est-à-dire $i = 1, 2, 3, 4$.

k désigne un entier supérieur ou égale à 1. Pour tout $i \in [\![1\,;4]\!]$, On pose X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1) Pour $i \in [\![1\,;4]\!]$, donner la loi de X_i puis son espérance $E(X_i)$ et sa variance $V(X_i)$.

2) Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 sont-elles indépendantes ?

3) Soient $(i, j) \in [\![1\,;4]\!]^2$ tel que $i \neq j$

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

b) En déduire la covariance du couple $(X_i + X_j)$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note $\mathrm{Z_k}$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de $\mathrm{Z_k}$.

4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Z_1}$ et la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Z_2}$. En déduire $\mathrm{E(Z_1)}$et $\mathrm{E(Z_2)}$.

5) Pour k un entier supérieur ou égale à 1.

5) a) Déterminer $\mathrm{P(Z_k = 1)}$.

b) Déterminer $\mathrm{P(Z_k = k)}$.

c) Montrer que pour tout $j \in [\![1\,;4]\!]$,

$$P(Z_{k+1} = j) = \frac{j}{4}\mathrm{P(Z_k = j)} + \frac{5-\mathrm{j}}{4}\mathrm{P(Z_k = j - 1)}.$$

d) En déduire que $E(Z_{k+1}) = \frac{3}{4}E(Z_k) + 1$.

6) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_k = E(Z_k) - 4$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

7) Déterminer $\mathrm{P(Z_k \geq 5)}$.

8) Montrer que $P(Z\quad = 2) = 6\ \frac{2^k - 2}{}$

Exercice 4

Pour cet exercice, on donne $e^{-1} = 0.37$.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & si\ x < 0 \\ f(x) = xe^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) Etudier les variations de f sur [0 , +∞[.

2) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers +∞.

3) Dresser le tableau de variation de f puis construire sa courbe représentative.

4) a) Soit a un réel strictement positif ; en utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^a xe^{-x}dx$.

4) b) Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx$

5) Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

6) Calculer l'espérance E(X) de X.