

# Proposition de corrigé de l'épreuve de Math 1 du C.N.C.M., section MP, année : 2015.

Mohammed ICHEHA\*      Mohamed AIT LHOUSSAIN†

10 juin 2015

## Problème I

### Partie I

**1.1.** Montrons que  $\Sigma_A$  est un espace vectoriel.

• **Première méthode :**

$\Sigma_A$  est une partie de l'espace vectoriel réel  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^{\mathbb{R}_+}$  des applications de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , donc il suffit de prouver que  $\Sigma_A$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^{\mathbb{R}_+}$ .

i)  $\Sigma_A \neq \emptyset$

En effet la fonction nulle  $\Theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), t \mapsto 0$  est un élément de  $\Sigma_A$  puisque  $\Theta$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \Theta''(t) = 0 = A(t)\Theta(t).$$

ii) Stabilité par combinaison linéaire :

Soit  $F, G \in \Sigma_A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda F + G \in \Sigma_A$  car  $\lambda F + G$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\begin{aligned} (\lambda F + G)''(t) &= \lambda F''(t) + G''(t) \\ &= \lambda A(t)F(t) + A(t)G(t) \\ &= A(t)(\lambda F(t) + G(t)) \\ &= A(t)((\lambda F + G)(t)). \end{aligned}$$

• **Deuxième méthode :**

On note  $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $T : \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}_+}, F \mapsto T(F)$  avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, T(F)(t) = F''(t) - A(t)F(t).$$

Alors  $T$  est une application linéaire car pour tout  $F, G \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} T(\lambda F + G)(t) &= (\lambda F + G)''(t) - A(t)(\lambda F + G)(t) \\ &= \lambda(F''(t) - A(t)F(t)) + (G''(t) - A(t)G(t)) \\ &= \lambda T(F)(t) + T(G)(t) = (\lambda T(F) + T(G))(t), \end{aligned}$$

---

\*Centre Omar Ibn Lkhattab , Meknes, Maroc

†Centre Salmane El Farissi , Salé, Maroc

ce qui veut dire :  $T(\lambda F + G) = \lambda T(F) + T(G)$ .

On a :  $\Sigma_A = \ker T$  car  $\Sigma_A \subset \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  et, pour tout  $F \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ , on a

$$\begin{aligned} F \in \ker T &\Leftrightarrow T(F) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, T(F)(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, F''(t) - A(t)F(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, F''(t) = A(t)F(t) \\ &\Leftrightarrow F \in \Sigma_A. \end{aligned}$$

donc  $\Sigma_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ , en particulier  $\Sigma_A$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

## 1.2.

### 1.2.1.

$$\begin{aligned} x_F \in \Sigma_B &\Leftrightarrow x'_F = B(t)x_F \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F' \\ F'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F' \\ F'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' \\ A(t)F \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow F'' = A(t)F \\ &\Leftrightarrow F \in \Sigma_A \end{aligned}$$

Ainsi  $x_F \in \Sigma_B \Leftrightarrow F \in \Sigma_A$ .

### 1.2.2.

•  $\Phi$  linéaire : Soit  $F, G \in \Sigma_A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda F + G) &= \begin{pmatrix} \lambda F + G \\ (\lambda F + G)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda F + G \\ \lambda F' + G' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ G' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \Phi(F) + \Phi(G) \end{aligned}$$

•  $\Phi$  injectif : Soit  $F \in \ker \Phi$  alors  $\Phi(F) = x_F = 0$ , donc  $\begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc  $F = F' = 0$ , en particulier,  $F = 0$ . Donc  $\Phi$  est injectif.

•  $\Phi$  surjectif : Soit  $y \in \Sigma_B$  alors  $y$  est une solution du système différentiel  $x' = B(t)x$ . Posons  $y = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$  avec  $F, G \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}_+}$ , donc  $F$  et  $G$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\begin{pmatrix} F' \\ G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

donc  $F' = G$  et  $G' = A(t)F$ , cela donne en particulier  $F$  deux fois dérivable et  $F'' = A(t)F$  donc  $F \in \Sigma_A$  et  $y = \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} = \Phi(F)$ .

Ainsi,  $\exists F \in \Sigma_A, y = x_F = \Phi(F)$  donc  $\Phi$  est surjectif.

Conclusion :  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**1.2.3.** L'application  $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$  est continue. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire  $\dim \Sigma_B = \dim(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})) = 2n$ . Comme  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  sont isomorphes, on a  $\dim \Sigma_A = 2n$ .

**1.3.**

Soit  $y_0 = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$  alors  $y_0 \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ .

• **Existence** : Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une et une seule solution  $x \in \Sigma_B$  tel que  $x(s) = y_0$ . Soit  $F = \Phi^{-1}(x)$ , donc  $x = x_F = \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix}$ , alors  $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = x(s) = \begin{pmatrix} F(s) \\ F'(s) \end{pmatrix}$  de sorte que  $F(s) = v$  et  $F'(s) = w$ . On a donc trouvé  $F \in \Sigma_A$  tel que  $F(s) = v$  et  $F'(s) = w$ .

• **Unicité** : soit  $G \in \Sigma_A$  tel que  $G(s) = v$  et  $G'(s) = w$ , alors  $x_G = \begin{pmatrix} G \\ G' \end{pmatrix}$  est un élément de  $\Sigma_B$  qui vérifie  $x_G(s) = y_0$ . Par unicité (Théorème de Cauchy-Lipschitz) on a  $x_G = x$  donc  $G = F$ .

## Partie II

**2.1.**

**2.1.1.**

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a :  $f(t) = \langle F(t), F(t) \rangle$ .  $F$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et l'application  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  est bilinéaire continue sur  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ , donc par composition,  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\begin{cases} f'(t) = 2\langle F(t), F'(t) \rangle \\ f''(t) = 2\langle F(t), F''(t) \rangle + 2\|F'(t)\|^2 \end{cases}$ . Comme  $F \in \Sigma_A$ , on a aussi, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f''(t) = 2\langle A(t)F(t), F(t) \rangle + 2\|F'(t)\|^2$

**2.1.2.**

On sait par hypothèse que  $\langle A(t)F(t), F(t) \rangle \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , donc, compte tenu de l'expression ci-dessus de  $f''(x)$ , on a :  $f'' \geq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  et par suite  $f$  est convexe.

**2.2.**

**2.2.1.**

Soit  $t \in [t_1, t_2]$ , alors il existe  $\tau \in [0, 1]$  tel que  $t = (1 - \tau)t_1 + \tau t_2$  alors, et compte tenu de  $f(t_1) = f(t_2) = 0$ , on a :

$$0 \leq f(t) \leq (1 - \tau)f(t_1) + \tau f(t_2) = 0,$$

ce qui donne  $f(t) = 0$ .

**2.2.2.** On a  $F = 0$  sur  $[t_1, t_2]$ , donc  $F' = 0$  sur  $[t_1, t_2]$  donc en posant  $s = t_1$  on a :

$$x_F(s) = \begin{pmatrix} F(s) \\ F'(s) \end{pmatrix} = 0$$

Il en découle que  $x_F$  est une solution du problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x' = B(t)x \\ x(s) = 0 \end{cases}$$

Or la fonction nulle est une solution de  $(\mathcal{C})$ . Par unicité de la solution de  $(\mathcal{C})$  on a  $x_F = 0$ , donc  $\Phi(F) = 0$ , donc  $F = 0$ , puisque  $\Phi$  est injectif.

**2.3.** Dans tout ce qui suit on notera  $f_v = \|F_v\|^2$ . On va proposer deux méthodes pour répondre à cette question.

• **Première méthode :**

La tangente au graphe de  $f_v$  en 0 est au dessous de ce graphe, donc  $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_v(t) \geq f'_v(0)t + f_v(0)$  or  $f'_v(0) = 2\langle F_v(0), F'_v(0) \rangle = \|v\|^2 > 0$  et  $f_v(0) = \|v\|^2$  donc  $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_v(t) \geq \|v\|^2 t + \|v\|^2$  avec  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|v\|^2 t + \|v\|^2 = +\infty$ , d'où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_v(t) = +\infty$ , et comme  $\|F_v\| = \sqrt{f_v}$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|F_v(t)\| = +\infty$

• **Deuxième méthode :**

On a  $f'_v(0) = \langle F_v(0), F'_v(0) \rangle = \|v\|^2$ . Comme  $v \neq 0$ , on a alors  $f'_v(0) > 0$ . Par ailleurs,  $f'_v$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  car  $f''_v \geq 0$  alors :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, f'_v(t) \geq f'_v(0) = \|v\|^2 > 0$ . Comme  $f_v$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$ , l'application  $\varphi : t \mapsto \frac{f_v(t) - f_v(0)}{t}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , en particulier on a pour tout  $t \geq 1$  :  $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ , or  $\varphi(1) = f_v(1) - f_v(0)$ . Posons  $A = f_v(1) - f_v(0)$  et montrons que  $A > 0$  : Par le théorème des accroissements finis il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que  $A = f'_v(c)$  et on sait que  $f'_v > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi :

$$\forall t \geq 1, \quad f_v(t) \geq At + f_v(0)$$

et comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (At + f_v(0)) = +\infty$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_v(t) = +\infty$  et comme  $\|F_v\| = \sqrt{f_v}$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|F_v(t)\| = +\infty$

**2.4.**

**2.4.1.** L'application  $\Psi$  est linéaire car si  $F, G \in \Sigma_A$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  alors :

$$\Psi(\lambda F + G) = ((\lambda F + G)(0), (\lambda F + G)(b)) = \lambda(F(0), F(b)) + (G(0), G(b)) = \lambda\Psi(F) + \Psi(G)$$

- Montrons que  $\Psi$  est injective : Si  $F \in \ker \Psi$  alors  $F \in \Sigma_A$  et  $F(0) = F(b) = 0$ . D'après le résultat de la question 2.2. appliqué à  $t_1 = 0$  et  $t_2 = b$  (on a bien  $0 = t_1 < t_2 = b$ ), on a  $F = 0$ .
- Comme  $\dim \Sigma_A = \dim (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) (= 2n)$ , l'application linéaire  $\Psi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**2.4.2.** Avant de montrer que  $\|\cdot\|_b$  est une norme, remarquons<sup>1</sup> tout d'abord que  $\|\cdot\|_b$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Démontrons ensuite que  $\|\cdot\|_b$  vérifie les axiomes d'une norme :

- Soit  $F \in \Sigma_A$  tel que  $\|F\|_b = 0$  alors  $\|F(0)\| + \|F(b)\| = 0$ , donc  $\|F(0)\| = \|F(b)\| = 0$ , c'est-à-dire  $F(0) = F(b) = 0$ . En appliquant le résultat de la question 2.2. pour  $(t_1, t_2) = (0, b)$  (puisque  $0 < b$ ), on a  $F$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $F \in \Sigma_A$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda F\|_b &= \|(\lambda F)(0)\| + \|(\lambda F)(b)\| \\ &= \|\lambda F(0)\| + \|\lambda F(b)\| \\ &= |\lambda| (\|F(0)\| + \|F(b)\|) \quad (\text{homogénéité pour } \|\cdot\|) \\ &= |\lambda| \|F\|_b. \end{aligned}$$

1. En fait une application  $\nu : E \rightarrow \mathbb{R}$  d'un espace vectoriel  $E$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant l'homogénéité et l'inégalité triangulaire est nécessairement à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . En effet, si c'est le cas alors :

- D'après l'homogénéité,  $\nu(0) = \nu(0.0) = 0.\nu(0) = 0$ .

- Pour tout  $x \in E$ , on a par l'inégalité triangulaire :  $0 = \nu(0) = \nu(x-x) \leq \nu(x) + \nu(-x) = 2\nu(x)$  (on a  $\nu(-x) = \nu(x)$  par homogénéité). Donc  $\nu(x) \geq 0$ .

• Pour tout  $F, G \in \Sigma_A$ , on a :

$$\begin{aligned}
\|F + G\|_b &= \|(F + G)(0)\| + \|(F + G)(b)\| \\
&= \|F(0) + G(0)\| + \|F(b) + G(b)\| \\
&\leq \|F(0)\| + \|G(0)\| + \|F(b)\| + \|G(b)\| \quad (\text{inégalité triangulaire pour } \|\cdot\|) \\
&= (\|F(0)\| + \|F(b)\|) + (\|G(0)\| + \|G(b)\|) \\
&= \|F\|_b + \|G\|_b.
\end{aligned}$$

Donc  $\|\cdot\|_b$  est bien une norme sur  $\Sigma_A$ .

**2.4.3.** Remarquons d'abord que  $\|\cdot\|_{\infty,b}$  est bien définie car toute fonction  $F$  élément de  $\Sigma_A$  est continue sur le compact  $[0, b]$  donc  $F$  est bornée sur  $[0, b]$ .

• Séparation : Soit  $F \in \Sigma_A$  tel que  $\|F\|_{\infty,b} = 0$ . Puisque  $\forall t \in [0, b]$ ,  $0 \leq \|F(t)\| \leq \|F\|_{\infty,b} = 0$  alors  $\forall t \in [0, b]$ ,  $F(t) = 0$ ; en particulier on a  $F(0) = F(b) = 0$  et  $0 < b$ . Donc par la question 2.2 on conclut que  $F = 0$ .

• Homogénéité : Soit  $F \in \Sigma_A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose à présent que  $\lambda \neq 0$ . Pour tout  $t \in [0, b]$ , on a :  $\|(\lambda F)(t)\| = |\lambda| \|F(t)\| \leq |\lambda| \sup_{\tau \in [0, b]} \|F(\tau)\| = |\lambda| \|F\|_{\infty,b}$ . Il en résulte, que :

$$\|(\lambda F)\|_{\infty,b} \leq |\lambda| \|F\|_{\infty,b}. \quad (1)$$

En appliquant (1) à  $F_1 = \lambda F$  et  $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$ , on obtient :

$$\left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda F) \right\|_{\infty,b} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda F\|_{\infty,b} \quad (2)$$

Combinant (1) et (2), on obtient  $\|\lambda F\|_{\infty,b} = |\lambda| \|F\|_{\infty,b}$ , valable aussi pour  $\lambda = 0$ . Ainsi on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall F \in \Sigma_A, \|\lambda F\|_{\infty,b} = |\lambda| \|F\|_{\infty,b}$$

• Inégalité triangulaire : Soit  $F, G \in \Sigma_A$ , alors comme  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$\forall t \in [0, b], \|F(t) + G(t)\| \leq \|F(t)\| + \|G(t)\| \leq \|F\|_{\infty,b} + \|G\|_{\infty,b}$$

Par passage au sup, on obtient :

$$\|F + G\|_{\infty,b} \leq \|F\|_{\infty,b} + \|G\|_{\infty,b}$$

**Conclusion :**  $\|\cdot\|_{\infty,b}$  est une norme sur  $\Sigma_A$ .

**2.4.4.** Comme  $\Sigma_A$  est un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes de  $\Sigma_A$  sont équivalentes en particulier les deux normes ci-dessus sont équivalentes.

## Partie III

### 3.1.

**3.1.1.** Comme  $g_{m,a} \in \Sigma_A$ , on a vu dans la question 2.1.2. que si on considère la fonction  $g$  définie par  $g(t) = \|g_{m,a}\|^2$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , alors  $g'' \geq 0$  et par suite  $g'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Or  $g'(m) = 2\langle g_{m,a}(m), g'_{m,a}(m) \rangle = 2\langle 0, g'_{m,a}(m) \rangle = 0$ , donc  $g' \leq 0$  et  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $g$  et  $\|g_{m,a}\|$  ont la même monotonie, alors  $\|g_{m,a}\|$  est elle aussi décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

**3.1.2.** On a  $\|g_{m,a}\|_1 = \|g_{m,a}(0)\| + \|g_{m,a}(1)\|$ . D'après la question 3.1.1,  $t \mapsto \|g_{m,a}(t)\|$  est décroissante sur  $[0, m]$ . Comme  $1 \leq m$ , on a donc :  $\|g_{m,a}(1)\| \leq \|g_{m,a}(0)\| = \|a\|$ , ce qui donne :  $\|g_{m,a}\|_1 \leq 2\|a\|$  et montre que la suite  $(g_{m,a})_{m \geq 1}$  est bornée dans l'espace vectoriel normé  $(\Sigma_A, \|\cdot\|_1)$ .

**3.1.3.**  $(\Sigma_A, \|\cdot\|_1)$  est un espace vectoriel normé de dimension finie et  $(g_{m,a})_{m \geq 1}$  est une suite bornée d'éléments de  $\Sigma_A$ . D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite  $(g_{\sigma(m),a})_{m \geq 1}$  qui converge dans  $(\Sigma_A, \|\cdot\|_1)$  vers un élément  $g_a$ . Soulignons qu'en particulier,  $g_a \in \Sigma_A$ , ce qui veut dire que  $g_a$  est une solution de l'équation différentielle (1).

## 3.2.

On conserve les notations de la question 3.1. précédente.

**3.2.1.** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}_+$ , il existe  $b > 0$  tel que  $K \subset [0, b]$ . D'après la question 2.4.4., on dispose des normes  $\|\cdot\|_{\infty,b}$  et  $\|\cdot\|_1$  sur  $\Sigma_A$  et elles sont équivalentes car  $\Sigma_A$  est de dimension finie. Comme  $K \subset [0, b]$ , on a :

$$(\star) \quad \sup_{t \in K} \|g_{\sigma(m),a}(t) - g_a(t)\| \leq \|g_{\sigma(m),a} - g_a\|_{\infty,b}$$

Par ailleurs  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{\infty,b}$  étant équivalentes et  $(g_{\sigma(m),a})_{m \geq 1}$  converge vers  $g_a$  pour  $\|\cdot\|_1$ , cette convergence a lieu pour  $\|\cdot\|_{\infty,b}$ . Donc, par  $(\star)$  ci-dessus, on a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{t \in K} \|g_{\sigma(m),a}(t) - g_a(t)\| = 0$$

Par conséquent, la suite  $(g_{\sigma(m),a})_{m \geq 1}$  converge uniformément sur  $K$  vers  $g_a$ .

**3.2.2.** Puisque  $(g_{\sigma(m),a}(0))_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $g_a$  sur tout compact de  $\mathbb{R}_+$ , elle converge simplement vers  $g_a$  sur  $\mathbb{R}_+$ , donc :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} g_{\sigma(m),a}(0) = g_a(0)$ , et comme  $\forall m \in \mathbb{N}^*, g_{\sigma(m),a}(0) = a$ , on a :  $g_a(0) = a$ .

L'application  $\|g_a\|$  est décroissante ; en effet soit  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  tel que  $t_1 \leq t_2$ . Il existe  $m_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $t_2 \leq m_0$ . Pour tout  $m \geq m_0$  on a donc  $t_1, t_2 \in [0, \sigma(m)] = I_m$ . On sait d'après la question 3.1.1. que  $\|g_{\sigma(m),a}\|$  est décroissante sur  $I_m$ , par suite :  $\|g_{\sigma(m),a}(t_2)\| \leq \|g_{\sigma(m),a}(t_1)\|$ , et par passage à la limite, quand  $m \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\|g_a(t_2)\| \leq \|g_a(t_1)\|$ , ce qui montre que  $g_a$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

**3.2.3.** On sait déjà que  $g_a$  est une solution de l'équation différentielle (1), puisque  $g_a \in \Sigma_A$  d'après la question 3.1.3. Il reste à démontrer qu'elle est bornée. Or on a  $\|g_a\|$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|g_a(t)\| \leq \|g_a(0)\| = \|a\|$$

Donc  $g_a$  est une solution bornée de l'équation différentielle (1).

**3.3.** Toutes les notations sont conservées.

**3.3.1.** Soit  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{e_i} \in \Sigma_1$ . Remarquons qu'effectivement  $g \in \Sigma_A$  comme le dit l'énoncé car pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $g_{e_i} \in \Sigma_A$ . De plus, pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $g_{e_i}$  est bornée car  $e_i \neq 0$ . Donc  $g$  est bornée. On conclut alors que tout élément de  $\Sigma_1$  est une solution bornée de l'équation différentielle (1)

**3.3.2.** Il suffit de montrer que la famille  $(g_{e_1}, \dots, g_{e_n})$  est libre car c'est une famille génératrice de  $\Sigma_1$ . Soit alors  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i g_{e_i} = 0$  alors  $\sum_{i=1}^n \alpha_i g_{e_i}(0) = 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , donc  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  par liberté de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**3.3.3.** Soit  $T : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \Sigma_A, v \mapsto T(v) = F_v$

Montrons que  $T$  est linéaire, pour cela soit  $v, w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a :  $\lambda F_v + F_w \in \Sigma_A$  et  $(\lambda F_v + F_w)(0) = (\lambda F_v + F_w)'(0) = \lambda v + w$ , donc par définition

$$\lambda F_v + F_w = F_{\lambda v + w}$$

Ainsi on a :

$$T(\lambda v + w) = \lambda T(v) + T(w)$$

On a  $\text{Im}(T) = \Sigma_2$ .

$T$  est injective car si  $v \in \ker T$ , cela veut dire que  $T(v) = F_v = 0$  donc  $F_v(0) = 0$ . Or  $F_v(0) = v$ , d'où  $v = 0$ .

Il découle de tout ce qui précède que  $\Sigma_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\Sigma_A$  isomorphe à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . En particulier on a  $\dim \Sigma_2 = n$ .

**3.3.4.** Comme  $\dim \Sigma_1 + \dim \Sigma_2 = \dim \Sigma_A$ , il suffit de prouver que  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{0\}$ . Pour cela soit  $g \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , alors il existe  $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $g = F_v$  et  $g$  est bornée. D'après la question 2.3, on a  $v = 0$  car sinon  $\|g\|$  aurait une limite infinie en  $+\infty$ , ce qui contredit qu'elle est bornée. Donc  $v = 0$  et par suite  $g = F_0 = 0$ . Donc :

$$\Sigma_A = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2.$$

**3.3.5.** Comme  $\Sigma_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\Sigma_A$  de dimension finie, il est fermé dans  $\Sigma_A$  donc  $\Sigma_A \setminus \Sigma_1$  est un ouvert de  $\Sigma_A$ .

• Densité : Soit  $\varphi \in \Sigma_A$  : On va montrer qu' il existe une suite  $(\psi_p)_{p \geq 1}$  d'éléments de  $\Omega = \Sigma_A \setminus \Sigma_1$  tel que  $\psi_p \rightarrow \varphi$  dans  $(\Sigma_A, \|\cdot\|_1)$  (toutes le normes sur  $\Sigma_1$  étant équivalentes, n'importe quelle autre norme sur  $\Sigma_A$  convient).

Si  $\varphi \in \Omega$  la suite constante définie par :  $\psi_p = \varphi$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , convient.

Si  $\varphi \notin \Omega$  alors  $\varphi \in \Sigma_1$ . Comme  $\Sigma_1 \neq \Sigma_A$  ( $n < 2n$  car  $n \in \mathbb{N}^*$ ), on a  $\Omega \neq \emptyset$ , soit alors  $\omega \in \Omega$ . Soit  $(\psi_p)_{p \geq 1}$  la suite définie par  $\psi_p = \varphi + \frac{1}{p}\omega$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , alors :

- Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\psi_p \in \Omega$ . En effet s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\psi_p \notin \Omega$  alors  $\psi_p \in \Sigma_1$  donc  $\omega = p(\psi_p - \varphi) \in \Sigma_1$ , ce qui contredit le fait que  $\omega \in \Omega$ .

- Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\|\psi_p - \varphi\|_1 = \frac{1}{p} \|\omega\|_1$ , donc  $\|\psi_p - \varphi\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

Il résulte de cette étude que tout élément  $\varphi$  de  $\Sigma_A$  est limite d'une suite  $(\psi_p)_{p \geq 1}$  à valeurs dans  $\Omega = \Sigma_A \setminus \Sigma_1$ . Donc  $\Sigma_A \setminus \Sigma_1$  est dense dans  $\Sigma_A$ .

• Soit  $F$  une solution de (1) .

- Si  $F \in \Sigma_1$  alors d'après la question 3.3.1. on a  $F$  est bornée.

- Si  $F \in \Sigma_A \setminus \Sigma_1$  alors  $F = G_1 + G_2$  avec  $G_1 \in \Sigma_1$  et  $G_2 \in \Sigma_2$  non nulle donc  $G_2$  s'écrit  $G_2 = F_v$  avec  $v \neq 0$ . D'après la question 2.3. on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|G_2(t)\| = +\infty$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\|F(t)\| = \|G_1(t) + G_2(t)\| \geq \|G_2(t)\| - \|G_1(t)\| \geq \|G_2(t)\| - M$$

où  $M = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|G_1(t)\|$  qui existe puisque  $G_1 \in \Sigma_1$ , donc  $G_1$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|G_2(t)\| - M) = +\infty$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|F(t)\|) = +\infty$ .

## Problème II

### Partie I : Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

**4.1.** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On a :  $V(k) = \{\ell \in \mathbb{Z} / \|\ell - k\|_1 = 1\}$ . Or pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$ , on a  $\|\ell - k\|_1 = |\ell - k|$ , donc  $\|\ell - k\|_1 = 1 \Leftrightarrow |\ell - k| = 1 \Leftrightarrow (\ell - k = 1 \text{ ou } \ell - k = -1) \Leftrightarrow (\ell = k + 1 \text{ ou } \ell = k - 1)$ , donc :  $V(k) = \{k - 1, k + 1\}$ . Ainsi,  $I(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  alors, compte tenu de  $V(k) = \{k + 1, k - 1\}$  obtenue ci-dessus pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et la définition de  $f$  harmonique, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ harmonique sur } \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \forall k' \in \mathbb{Z}, \quad f(k') = \frac{1}{2}(f(k' + 1) + f(k' - 1)) \\ &\Leftrightarrow \forall k' \in \mathbb{Z}, f(k' + 1) = 2f(k') - f(k' - 1) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, f(k + 2) = 2f(k + 1) - f(k) \quad (\star) \end{aligned}$$

( $\star$ ) étant justifié par le changement de variable bijectif :  $k = k' + 1$ .

Conclusion : Une applications  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique si et seulement si elle vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k + 2) = 2f(k + 1) - f(k) \quad (3)$$

**4.2. Structure d'espace vectoriel :** Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des applications harmoniques sur  $\mathbb{Z}$ .

$\mathcal{E}$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  car :

- la fonction nulle est harmonique puisqu'elle vérifie (3)
- Soit  $f, g \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(k + 2) &= \lambda f(k + 2) + g(k + 2) \\ &= \lambda(2f(k + 1) - f(k)) + 2g(k + 1) - g(k) \\ &= 2(\lambda f + g)(k + 1) - (\lambda f + g)(k) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\lambda f + g \in \mathcal{E}$

**Dimension de  $\mathcal{E}$  :**

Soit  $f \in \mathcal{E}$  alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$f(k + 2) - f(k + 1) = f(k + 1) - f(k)$$

donc l'application

$$k \mapsto f(k + 1) - f(k)$$

est constante de valeur  $a = f(1) - f(0)$  de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k + 1) - f(k) = a$$

Si  $p, q$  sont deux entiers relatifs tel que  $p \leq q$ , on a en sommant de  $p$  à  $q$  :

$$\sum_{k=p}^q f(k + 1) - f(k) = ((q - p) + 1)a = f(q + 1) - f(p).$$

En particulier si  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour  $(p, q) = (0, n - 1)$  il vient :

$$f(n) = f(0) + an$$

et pour  $(p, q) = (-n, -1)$  il vient :

$$f(0) - f(-n) = -na,$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, f(k) = ak + f(0)$$

Égalité valable si  $k = 0$  donc finalement :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = ak + b, \text{ avec } \begin{cases} a = f(1) - f(0) \\ b = f(0) \end{cases} .$$



Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , notons  $f_{a,b}$  l'application de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall k \in \mathbb{Z}, f_{a,b}(k) = ak + b$ . Réciproquement, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , l'application  $f_{a,b}$  vérifie :  $f_{a,b}(k+2) - 2f_{a,b}(k+1) + f_{a,b}(k) = 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , donc  $f_{a,b} \in \mathcal{E}$ . Ainsi, on a montré que :

$$\mathcal{E} = \{f_{a,b}/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarquons que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f_{a,b} = af_{1,0} + bf_{0,1}$ , de sorte que la famille  $\mathcal{B} = (f_{1,0}, f_{0,1})$  est une famille génératrice de  $\mathcal{E}$ .

Par ailleurs, la famille  $\mathcal{B}$  est libre car si  $\lambda f_{1,0} + \mu f_{0,1} = 0$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ) alors en appliquant à 0 et 1 on obtient  $\lambda = \mu = 0$ . Il en découle que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{E}$  et que par conséquent,  $\dim \mathcal{E} = 2$ .

**4.3.** On a, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $k \in I(\mathbb{Z}^*) \Leftrightarrow V(k) \subset \mathbb{Z}^*$ , or  $V(k) = \{k-1, k+1\}$ , il en découle que

$$I(\mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Notons  $\mathcal{E}'$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{R}$  harmoniques sur  $I(\mathbb{Z}^*)$ . Une application  $f : \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique sur  $I(\mathbb{Z}^*)$  si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} f(n+2) = 2f(n+1) + f(n) \\ f(-n-2) = 2f(-n-1) - f(-n) \end{cases}$$

Comme à la question précédente, on a :

$$\exists (a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4, \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad f(k) = \begin{cases} ak + b & \text{si } k \geq 1 \\ a'k + b' & \text{si } k \leq -1 \end{cases} \quad (4)$$

Réciproquement, une application  $f : \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie selon (4) ci-dessus est harmonique sur  $I(\mathbb{Z}^*)$  (en effet les restrictions respectives à  $\mathbb{Z}_+^*$  et  $\mathbb{Z}_-^*$  coïncident avec les restrictions d'applications harmoniques sur  $\mathbb{Z}$ .)

Notons  $f_{a,b,a',b'}$  la fonction définie selon (4). On voit que :

$$f_{a,b,a',b'} = af_{(1,0,0,0)} + bf_{(0,1,0,0)} + a'f_{(0,0,1,0)} + b'f_{(0,0,0,1)}$$

De sorte que  $\mathcal{F} = (f_{(1,0,0,0)}, f_{(0,1,0,0)}, f_{(0,0,1,0)}, f_{(0,0,0,1)})$  est une famille génératrice de  $\mathcal{E}'$ . La famille  $\mathcal{F}$  est libre car si pour  $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\alpha f_{(1,0,0,0)} + \beta f_{(0,1,0,0)} + \alpha' f_{(0,0,1,0)} + \beta' f_{(0,0,0,1)} = 0$$

alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha k + \beta = 0$  ce qui donne  $\alpha = \beta = 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*, -\alpha' k + \beta' = 0$  ce qui donne  $\alpha' = \beta' = 0$ .

Il en découle que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{E}'$  et que  $\dim \mathcal{E}' = 4$ .

**4.4.**

**4.4.1.** Pour tout  $\ell \in V(k)$ , on a :

$$\begin{aligned} f(\ell) &\leq \sum_{i \in V(k)} f(i) \quad (\text{car } f \geq 0) \\ &\leq 2df(k) \quad (\text{car } f \text{ est harmonique}) \end{aligned}$$

**4.4.2.** On va raisonner par récurrence sur  $n = \|k - \ell\|_1$

**Démarrage :** Si  $n = 0$  alors  $\ell = k$  et la relation demandée est vérifiée (on a même une égalité).

**Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que la propriété à prouver est vraie pour  $n$ . Soit  $\ell, k \in \mathbb{Z}^d$  tel que

$$\|\ell - k\|_1 = n + 1 \quad (\star).$$

Posons  $\ell = (\ell_i)_{1 \leq i \leq d}$  et  $k = (k_i)_{1 \leq i \leq d}$ , donc  $\|\ell - k\|_1 = \sum_{i=1}^d |\ell_i - k_i|$ . Comme  $\|\ell - k\|_1 = n + 1 \geq 1$  il existe  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$  tel que  $|\ell_j - k_j| \geq 1$ .

Considérons  $\ell' = \ell - \text{sign}(\ell_j - k_j)e[j]$ . Ainsi si on pose  $\ell' = (\ell'_i)_{1 \leq i \leq d}$  alors pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on a :

$$a : \ell'_i = \begin{cases} \ell_i & \text{si } i \neq j \\ \ell_j - \text{sign}(\ell_j - k_j) & \text{si } i = j \end{cases} .$$

On a  $\|\ell' - k\|_1 = n$ , en effet :

$$\|\ell' - k\|_1 = |\ell'_j - k_j| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d |\ell_i - k_i|.$$

(On convient que la somme :  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d |\ell_i - k_i|$  vaut 0 dans le cas particulier de  $d = 1$ ).

Remarquons que, compte tenu de  $\forall t \in \mathbb{Z}^*, t = \text{sign}(t)|t|$  et du fait que  $|\ell_j - k_j| \geq 1$  :

$$\begin{aligned} |\ell'_j - k_j| &= |\ell_j - k_j - \text{sign}(\ell_j - k_j)| \\ &= |\text{sign}(\ell_j - k_j)(|\ell_j - k_j| - 1)| \\ &= |\ell_j - k_j| - 1. \end{aligned}$$

Il en découle que  $\|\ell' - k\|_1 = \|\ell - k\|_1 - 1 = (n + 1) - 1 = n$ .

Il est aisé de remarquer aussi que  $\|\ell' - \ell\|_1 = 1$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(\ell') \leq (2d)^{\|\ell' - k\|_1} f(k) \quad (**)$$

Puisque  $\|\ell - \ell'\|_1 = 1$ , donc d'après la question précédente, on a :

$$f(\ell) \leq 2df(\ell') \quad (***)$$

Combinant (\*\*) et (\*\*\*) il vient :

$$f(\ell) \leq (2d)^{\|\ell' - k\|_1 + 1} f(k)$$

et comme  $\|\ell' - k\|_1 + 1 = \|\ell - k\|_1$ , on a finalement :

$$f(\ell) \leq (2d)^{\|\ell - k\|_1} f(k)$$

**4.4.3.** Si on suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $f(k) = 0$ , alors en appliquant le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}^d, \quad f(\ell) \leq 0$$

Comme, en plus  $f$  est supposée positive, on a  $f(\ell) = 0, \forall \ell \in \mathbb{Z}^d$ , ce qui prouve que  $f = 0$ .

**4.4.4.** Supposons que  $f$  n'est pas nulle, alors d'après la question ci-dessus, on a  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, f(k) > 0$ . Appliquant la question **4.4.2.** on a pour  $k, \ell \in \mathbb{Z}^d$  :

$$(1) \quad \ln(f(\ell)) \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d) + \ln(f(k))$$

ce qui fournit :

$$(2) \quad \ln(f(\ell)) - \ln(f(k)) \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$$

Par symétrie des rôles, on a aussi :

$$(2)' \quad \ln(f(\ell)) - \ln(f(k)) \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$$

Il en découle que :

$$|\ln(f(\ell)) - \ln(f(k))| \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$$

## Partie II : Un résultat de LIOUVILLE dans le cadre discret

**5.1.** On se donne une application  $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\exists(a, b) \in [0, +\infty[^2, \forall k \in \mathbb{Z}^d, |g(k)| \leq \exp(a\|k\|_1 + b). \quad (5)$$

**5.1.1.** Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g(Y_n)| \leq \exp(an + b) \quad (6)$$

La variable aléatoire  $Y_n$  étant à valeurs dans  $\mathbb{Z}^d$ , on a en vertu de (5) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g(Y_n)| \leq \exp(a\|Y_n\|_1 + b)$$

Donc, pour avoir (6), il suffit qu'on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|Y_n\|_1 \leq n \quad (7)$$

On a pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$Y_{i+1} - Y_i = \text{sign}(X_i)e[|X_i|]$$

On suppose que  $n \geq 1$ . Par sommation de 0 à  $n - 1$ , et compte tenu de  $Y_0 = 0$ , on obtient :

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \text{sign}(X_i)e[|X_i|]$$

Comme  $\text{sign}$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  et que les vecteurs  $e[|X_i|]$  sont tous de norme 1, on a par l'inégalité triangulaire :  $\|Y_n\|_1 \leq n$ ; inégalité valable si  $n = 0$ ; ce qui achève la preuve.

**5.1.2.** Puisque  $U(\Omega) = \mathbb{N}$ , on a d'après la question précédente :

$$|g(Y_U)| \leq \exp(aU + b) \quad (8)$$

Considérons la variable aléatoire réelle  $V = \exp(aU + b)$ . Puisque  $U$  admet une espérance, alors par le théorème de transfert appliqué à la fonction  $t \mapsto \exp(at + b)$ , il suffit que la série :

$$\sum \mathbb{P}(U = n) \exp(an + b)$$

converge absolument pour que  $V$  admette une espérance, auquel cas  $\mathbb{E}(V)$  est la somme de cette série. Or le terme général de la série en question est  $V_n = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!} \exp(an + b)$ , donc  $V_n = \exp(b - \lambda) \frac{(\lambda e^a)^n}{n!}$  de sorte que  $V_n \geq 0$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n = \exp(b - \lambda) \exp(\lambda e^a) = \exp(b + \lambda(e^a - 1))$ , donc  $V$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(V) = \exp(b + \lambda(e^a - 1))$ . En vertu de (8) ci-dessus, on déduit que la variable aléatoire réelle  $|g(Y_U)|$  admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(|g(Y_U)|) \leq \exp(b + \lambda(e^a - 1)).$$

**5.1.3. •** L'existence de l'espérance de la variable aléatoire  $g(Y_U)^2$  :

De l'inégalité (8) ci-dessus, on déduit aussi :

$$0 \leq g(Y_U)^2 \leq \exp(2aU + 2b) \quad (9)$$

En posant  $a' = 2a$  et  $b' = 2b$ , le procédé utilisé ci-dessus permet de déduire que la variable aléatoire  $g(Y_U)^2$  admet une espérance avec une majoration similaire en remplaçant  $a$  et  $b$  par  $2a$  et  $2b$  respectivement.

• Par le théorème de transfert appliqué à la variable aléatoire  $g(Y_U)$  et l'application  $t \mapsto t^2$ , on a, en notant  $D = g(Y_U)(\Omega)$  :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{x \in D} x^2 \mathbb{P}(g(Y_U) = x)$$

Soit  $\omega \in \Omega$ , alors :

$$\begin{aligned} \omega \in (g(Y_U) = x) &\Leftrightarrow g(Y_U(\omega)) = x \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^d, Y_U(\omega) = k \text{ et } g(k) = x \\ &\Leftrightarrow \exists k \in Z_x, \omega \in (Y_U = k) \end{aligned}$$

où pour tout  $x \in D$ , on pose  $Z_x = \{k \in \mathbb{Z}^d / g(k) = x\}$ . Ainsi on a prouvé que

$$(g(Y_U) = x) = \bigcup_{k \in Z_x} (Y_U = k).$$

Comme il s'agit d'une union dénombrable disjointe, on a alors :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{x \in D} \sum_{k \in Z_x} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

Si on note  $Z = \bigcup_{x \in D} Z_x$  alors  $(Z_x)_{x \in D}$  est une partition de  $Z$ . En effet :

- Pour tout  $x \in D$  on a  $Z_x \neq \emptyset$  car comme  $x \in D$  il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $g(Y_U)(\omega) = x$ . Posons  $k = Y_U(\omega)$  alors  $k \in \mathbb{Z}^d$  et  $g(k) = x$ , ce qui veut dire  $k \in Z_x$ , donc  $Z_x \neq \emptyset$ .
- Si  $x, y \in D$  tel que  $Z_x \cap Z_y \neq \emptyset$ , soit  $k \in Z_x \cap Z_y$  alors  $x = g(k)$  et  $y = g(k)$ , donc  $x = y$ .
- Finalement on a  $\bigcup_{x \in D} Z_x = Z$  par définition de  $Z$ .

Comme nous avons une famille sommable de nombres réels positifs, on peut appliquer les principes de sommation par paquets, notamment on a :

- (i) Pour tout  $x \in D$  la famille  $(g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k))_{k \in Z_x}$  est sommable.
- (ii) Si on note  $s_x$  sa somme alors la famille  $(s_x)_{x \in D}$  est sommable.
- (iii) On a :  $\sum_{x \in D} s_x = \sum_{k \in Z} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$ .

Cela veut dire :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{k \in Z} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

On va montrer que si  $\mathbb{P}(Y_U = k) \neq 0$ ; ( $k \in \mathbb{Z}^d$ ), alors  $k \in Z$ . En effet, si  $\mathbb{P}(Y_U = k) \neq 0$  alors forcément  $(Y_U = k) \neq \emptyset$ . Soit alors  $\omega \in \Omega$  tel que  $Y_U(\omega) = k$  et soit  $x = g(k)$ . Alors  $k \in Z_x$ , et comme  $Z_x \subset Z$ , on a  $k \in Z$ .

Il en résulte que  $\mathbb{P}(Y_U = k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus Z$ , par suite :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

**5.2.** On considère  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ , harmonique sur  $\mathbb{Z}^d$  et vérifiant  $f(0) = 1$ . On rappelle que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1}$$

---

2. En fait on peut démontrer même que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \quad \mathbb{P}(Y_U = k) > 0$$

c'est-à-dire que  $Z = \mathbb{Z}^d$

**5.2.1.** Soit  $j \in \mathbb{N}$ , On a  $Y_j(\Omega)$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ . On va démontrer cela par récurrence : Pour  $j = 0$  on a  $Y_0(\Omega) = \{0\}$ , donc c'est clair.

Si pour  $j \in \mathbb{N}$  l'ensemble  $Y_j(\Omega)$  est fini comme  $Y_{j+1} = Y_j + \text{sign}(X_j)e[|X_j|]$  et que pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a  $\text{sign}(X_j)(\omega) \in \{-1, 1\}$  et  $e[|X_j(\omega)|] \in \{e_1, \dots, e_d\}$ , alors  $\text{sign}(X_j)e[|X_j|](\Omega)$  est fini. Et comme  $Y_j(\Omega)$  est par hypothèse fini, alors  $Y_{j+1}(\Omega)$  est fini, ce qui termine la preuve.

Ainsi l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire  $Y_j$  est fini, donc de même pour la variable aléatoire  $f(Y_j)$  et elle admet par suite les moments de tout ordre, notamment le moment d'ordre 2.

Remarquons que l'inégalité  $f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1}$  s'écrit (puisque  $f \geq 0$ ) :  $|f(k)| \leq \exp(a\|k\|_1 + b)$  avec  $a = \ln(2d)$  et  $b = 0$ , ce qui permet de dire que  $f$  satisfait la condition de la question précédente pour  $g$ . On peut donc appliquer les résultat de la question **5.1.3.**, donc : la variable aléatoire  $f(Y_U)$  admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

Remarquons que pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} \omega \in (Y_U = k) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, U(\omega) = n \quad \text{et} \quad Y_n(\omega) = k \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in ((U = n) \cap (Y_n = k)) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U = n) \cap (Y_n = k)) \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad (Y_U = k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U = n) \cap (Y_n = k))$$

Compte tenu de l'indépendance des  $Y_n$  et  $U$  supposée par l'énoncé et du fait que la réunion ci-dessus est disjointe, on a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{P}(Y_U = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n) \mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{P}(Y_n = k)$$

et par suite et par interversion des signes de sommation validé par la sommabilité de la famille en question, on a :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)^2 \mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E}(f(Y_n)^2).$$

Par la même méthode utilisée dans **5.1.3.** on peut prouver que :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_U = k)$$

On obtient alors la formule demandée en utilisant aussi la même méthode que celle pour prouvée la formule donnant  $\mathbb{E}(f(Y_U)^2)$ .

**5.2.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On sait que  $Y_{n+1} = Y_n + \text{sign}(X_n)e[|X_n|]$

On a

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_{n+1} = k)$$

Notons qu'il s'agit d'une somme finie car  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $Y_p(\Omega)$  est fini.

Or, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(Y_n = \ell) \pi_{k,\ell}$$

avec

$$\pi_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{P}(Y_n = \ell) = 0 \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = k) / \mathbb{P}(Y_n = \ell) & \text{si } \mathbb{P}(Y_n = \ell) \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_n = \ell) \pi_{k,\ell}$$

La famille  $(\mathbb{P}(Y_n = \ell) \pi_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d}$  est à support finie, ce qui permet en particulier de permuter les deux symboles de sommation et obtenir :

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_n = \ell) \pi_{k,\ell}$$

Soit  $\ell \in \mathbb{Z}^d$ , alors deux cas sont possibles et dans chacun des cas, on va prouver que :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_n = \ell) \pi_{k,\ell} = f(\ell) \mathbb{P}(Y_n = \ell) \quad (10)$$

• **Premier cas** :  $\mathbb{P}(Y_n = \ell) = 0$ , dans ce cas la relation (10) est clairement réalisée.

• **Deuxième cas** :  $\mathbb{P}(Y_n = \ell) \neq 0$ , dans ce cas, on a :  $\pi_{k,\ell} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k / Y_n = \ell)$ . Or par définition de la suite on a  $\|Y_{n+1} - Y_n\|_1 = 1$ , donc la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k / Y_n = \ell)$  est nulle dès que  $k \notin V(\ell)$ , et comme l'application  $\chi_\ell : i \mapsto \text{sign}(i) X_{|i|}$  est une bijection de  $D_d = \llbracket -d, d \rrbracket \setminus \{0\}$  vers  $V(\ell)$ , la valeur de cette probabilité conditionnelle, pour tout  $k \in V(\ell)$  est :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k / Y_n = \ell) = \frac{1}{2d}$$

Ainsi,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_n = \ell) \pi_{k,\ell} = \left( \frac{1}{2d} \sum_{k \in V(\ell)} f(k) \right) \mathbb{P}(Y_n = \ell)$$

et comme  $f$  est harmonique, on a :  $\frac{1}{2d} \sum_{k \in V(\ell)} f(k) = f(\ell)$ , ce qui prouve la relation (10).

On a alors :

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} f(\ell) \mathbb{P}(Y_n = \ell) = \mathbb{E}(f(Y_n)).$$

Ainsi la suite  $(\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}(f(Y_0)) = \mathbb{E}(f(0)) = f(0) = 1$$

**Déduction** : On a d'après 5.2.1 :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E}(f(Y_n)).$$

Compte tenu de  $\mathbb{E}(f(Y_n)) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1.$$

**5.3. i)** Montrons que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  :

- D'abord  $0 \in H$ , donc  $H \neq \emptyset$ .

- Soit  $f_1, f_2 \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  : Le seule point à vérifier est l'existence de  $\mathbb{E}((\lambda f_1 + f_2)(Y_U))^2$ , pour cela remarquons que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  on a :  $0 \leq (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ , donc :

$$0 \leq ((\lambda f_1 + f_2)(Y_U))^2 \leq 2\lambda^2(f_1(Y_U))^2 + 2(f_2(Y_U))^2$$

ce qui prouve que  $\lambda f_1 + f_2 \in H$ .

**ii)**  $S$  est un produit scalaire :

• Existence : Soit  $f_1, f_2 \in H$ . Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a :  $|xy| \leq x^2 + y^2$ , donc  $|f_1(Y_U)f_2(Y_U)| \leq f_1(Y_U)^2 + f_2(Y_U)^2$  et comme  $\mathbb{E}(f_i(Y_U)^2)$  existent pour  $i \in \{1, 2\}$  (car  $f_i \in H$ ), il en découle que  $S$  est bien définie.

• Symétrie de  $S$  : C'est immédiat par commutativité de la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .

• Linéarité à droite :

Soit  $f, g_1, g_2 \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} S(f, \lambda g_1 + g_2) &= \mathbb{E}(f(Y_U)(\lambda g_1 + g_2)(Y_U)) \\ &= \mathbb{E}(\lambda f(Y_U)g_1(Y_U) + f(Y_U)g_2(Y_U)) \\ &= \lambda \mathbb{E}(f(Y_U)g_1(Y_U)) + \mathbb{E}(f(Y_U)g_2(Y_U)) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= \lambda S(f, g_1) + S(f, g_2) \end{aligned}$$

•  $S$  est positive : Clair

•  $S$  est définie :

Soit  $f \in H$  tel que  $S(f, f) = 0$ , alors  $\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = 0$ . Or d'après la méthode utilisée dans la question **5.1.3**, on a  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k) = 0$  et comme il s'agit d'une somme à termes positifs, on a  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, f(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k) = 0$ . On va prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \mathbb{P}(Y_U = k) \neq 0$$

ce qui permettra de conclure que  $f = 0$ .

On a

$$(Y_U = k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U = n) \cap (Y_n = k))$$

donc, on a en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y_U = k) \geq \mathbb{P}((U = n) \cap (Y_n = k))$$

Les variables aléatoires  $Y_n$  et  $U$  sont indépendantes et  $\mathbb{P}(U = n) > 0$ , donc on est ramené à démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \exists n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y_n = k) > 0$$

On va prouver ça en raisonnant par récurrence sur  $q = \|k\|_1$ .

Démontrons par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}(q)$  suivante :

$$\mathcal{P}(q) : \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \|k\|_1 = q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y_n = k) > 0$$

• **Démarrage** : Pour  $q = 0$ , si  $k \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\|k\|_1 = 0$ , cela veut dire que  $k = 0$  et comme  $Y_0 = 0$ , alors  $n = 0$  convient.

• **Hérédité** : Soit  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(q)$  est vraie et soit  $k \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\|k\|_1 = q + 1$ . Comme on

l'a fait dans la question **4.4.2**, on sait qu'il existe  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et  $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$  tel que  $k' = k + \varepsilon_j e[j]$  réalise  $\|k'\|_1 = q$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{P}(Y_n = k') > 0$ . On a :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) \geq \mathbb{P}((Y_{n+1} = k) \cap (Y_n = k')) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k / Y_n = k') \mathbb{P}(Y_n = k')$$

On a déjà prouvé dans la question **5.2.2** que la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k / Y_n = k') \mathbb{P}(Y_n = k')$  vaut  $\frac{1}{2d}$  (l'important est qu'elle soit non nulle). Donc  $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \frac{1}{2d} \mathbb{P}(Y_n = k') > 0$ .

#### 5.4.

**5.4.1.** •  $f_i$  est bien définie. En effet, on a  $\|m\|_2 = \max_{f \in E} \|f\|_2$  et  $\mathbb{1} \in E$ , donc  $\|m\|_2 \geq \|\mathbb{1}\|_2 > 0$ . Ainsi,  $m \neq 0$ ; comme  $m \geq 0$  et  $m$  harmonique alors d'après **4.4.3**, on déduit que  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, m(k) > 0$ . Ce résultat sera utile par la suite, en particulier  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, m(k) \neq 0$ . Donc  $f_i$  est bien définie sur  $\mathbb{Z}^d$ .

•  $f_i$  est harmonique sur  $\mathbb{Z}^d$ .

En effet : Comme  $f = \alpha_i \tilde{m}$  avec

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1}{m(\text{sign}(i)e[|i|])} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^d, \tilde{m}(k) = m(k + \text{sign}(i)e[|i|]) \end{cases}$$

Il est aisé de voir que l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $\mathbb{Z}^d$  est stable par combinaison linéaire, il suffit donc de prouver que  $\tilde{m}$  est harmonique sur  $\mathbb{Z}^d$ .

Soit pour cela  $k \in I(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^d$ , alors en adoptant la notation  $k' = k + \text{sign}(i)e[|i|]$ , on a :

$$\sum_{\ell \in V(k)} \tilde{m}(\ell) = \sum_{\ell \in V(k)} m(\ell + \text{sign}(i)e[|i|]) = \sum_{\ell' \in V(k')} m(\ell')$$

La dernière égalité étant justifiée par le fait que l'application

$$V(k) \rightarrow V(k'); \ell \mapsto \ell' = \ell + \text{sign}(i)e[|i|]$$

est une bijection.

. Puisque  $m$  est supposée harmonique, on a donc :

$$\sum_{\ell \in V(k)} \tilde{m}(\ell) = (2d) m(k') = (2d) \tilde{m}(k)$$

ce qui prouve que  $\tilde{m}$  est harmonique.

**Conclusion :**  $f_i$  est harmonique.

•  $f_i$  déjà fait puisqu'on a prouvé que  $m > 0$ .

•  $f_i(0) = 1$  : clair en remplaçant  $x$  par 0.

**5.4.2.**  $D_d = \{-d, \dots, -1, 1, \dots, d\}$ . pour tout  $i \in D_d$ , posons

$$\lambda_i = \frac{m(\text{sign}(i)e[|i|])}{2d}$$

Alors on a ce qui suit :

• Pour tout  $i \in D_d$ , on a  $\lambda_i > 0$ ; en effet pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}^d$ , on a  $m(\ell) > 0$  et  $d > 0$ .

•  $\sum_{i \in D_d} \lambda_i = 1$ ; en effet les éléments de la forme  $\text{sign}(i)e[|i|]$  quand  $i$  décrit  $D_d$ , ne sont autre que les

éléments de  $V(0)$ . Compte tenu de cette remarque et le fait que  $m$  est harmonique, on a :

$$\sum_{i \in D_d} \lambda_i = \frac{1}{2d} \sum_{\ell \in V(0)} m(\ell) = m(0) = 1$$



- $\sum_{i \in D_d} \lambda_i f_i = m$ , en effet, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , et  $i \in D_d$ , on sait que :

$$f_i(x) = \frac{m(x + \text{sign}(i)e[|i|])}{m(\text{sign}(i)e[|i|])}$$

Il en résulte que :

$$\sum_{i \in D_d} \lambda_i f_i(x) = \frac{1}{2d} \sum_{i \in D_d} m(x + \text{sign}(i)e[|i|]) = \frac{1}{2d} \sum_{\ell \in V(x)} m(\ell) = m(x)$$

La dernière égalité étant justifiée par le fait que  $m$  est harmonique et l'avant dernière, tout comme ci-dessus car les éléments de la forme  $x + \text{sign}(i)e[|i|]$  quand  $i$  décrit  $D_d$ , ne sont autre que les éléments de  $V(x)$ .

**Conclusion :** On a montré qu'il existe une famille  $(\lambda_i)_{i \in D_d}$  de nombre réels positifs de somme 1 tel que  $m = \sum_{i \in D_d} \lambda_i f_i$ , ce qui justifie que  $m$  est un combinaison linéaire convexe des  $f_i$ .

**5.4.3.** Montrons que  $\forall i \in D_d, \forall x \in \mathbb{Z}^d, m(x) = f_i(x)$  On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i - m\|_2^2 &= \sum_{i \in D_d} \lambda_i (\|f_i\|_2^2 - 2\langle f_i, m \rangle + \|m\|_2^2) \\ &= \sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i\|_2^2 - 2 \left\langle \sum_{i \in D_d} \lambda_i f_i, m \right\rangle + \left( \sum_{i \in D_d} \lambda_i \right) \|m\|_2^2 \\ &= \sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i\|_2^2 - 2\langle m, m \rangle + \|m\|_2^2, \text{ ( car } \sum_{i \in D_d} f_i = m \text{ et } \sum_{i \in D_d} \lambda_i = 1) \\ &= \sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i\|_2^2 - \|m\|_2^2 \end{aligned}$$

Or, pour tout  $i \in D_d$ , on a  $f_i \in E$  car  $f_i$  est harmonique et  $f_i \geq 0$  et  $f_i(0) = 1$ .

Comme  $\|m\|_2 = \max_{f \in E} \|f\|_2$ , on a :

$$\forall i \in D_d, \|f_i\|_2 \leq \|m\|_2$$

Donc

$$\sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i\|_2^2 - \|m\|_2^2 \leq \sum_{i \in D_d} \lambda_i \|m\|_2^2 - \|m\|_2^2 = 0$$

ce qui prouve que :

$$0 \leq \sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i - m\|_2^2 \leq 0$$

donc que :

$$\sum_{i \in D_d} \lambda_i \|f_i - m\|_2^2 = 0$$

Comme il s'agit d'une somme à termes positifs et qu'en plus  $\lambda_i > 0, \forall i \in D_d$ , on a  $\forall i \in D_d, f_i = m$

**Conclusion :**  $\forall i \in D_d, \forall k \in \mathbb{Z}^d, f_i(k) = m(k)$ .

• Pour tout  $i \in D_d$ , posons  $u_i = \text{sign}(i)e[|i|]$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on a  $m(u_{-i}) = f_i(u_{-i}) = \frac{m(u_{-i} + u_i)}{m(u_i)}$

Comme  $u_{-i} + u_i = 0$  et que  $m(0) = f_i(0) = 1$ , on obtient :

$$(\star\star\star) \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, m(u_i)m(u_{-i}) = 1$$

On a

$$1 = m(0) = \frac{1}{2d} \sum_{i \in D_d} m(u_i) \quad (\text{car } m \text{ est harmonique sur } \mathbb{Z}^d)$$

On obtient compte tenu de  $(\star \star \star)$  ci-dessus :

$$\sum_{i=1}^d \left( m(u_i) + \frac{1}{m(u_i)} \right) = 2d$$

qui s'écrit aussi

$$(\star \star) \quad \sum_{i=1}^d \left( m(u_i) + \frac{1}{m(u_i)} - 2 \right) = 0$$

ou alors :

$$\sum_{i=1}^d \frac{(m(u_i) - 1)^2}{m(u_i)} = 0 \quad (11)$$

Dans (11) on a une somme nulle dont les termes sont positifs, donc ces termes sont tous nuls, d'où :  $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad m(u_i) = 1$ , ce qui, compte tenu de  $(\star \star \star)$ , donne aussi :  $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad m(u_{-i}) = 1$ , ce qui donne finalement :  $\forall i \in D_d \quad m(u_i) = 1$

Soit  $x \in \mathbb{Z}^d$  alors  $m(x) = f_i(x) = \frac{m(x+u_i)}{m(u_i)}$  par suite :  $m(x + u_i) = m(x)m(u_i) = m(x)$  ( car  $m(u_i) = 1$  ), ce qui se traduit aussi par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad m(x + e[i]) = m(x - e[i]) = m(x). \quad (12)$$

On va démontrer par récurrence sur  $n = \|x\|_1$  que  $m(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ .

-Pour  $n = 0$  c'est clair car  $m(0) = 1$ .

-Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $m(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\|x\|_1 = n$ . Soit  $x \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\|x\|_1 = n + 1$ .

Posons  $x = \sum_{j=1}^d x_j e[j]$ , et comme  $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j| = n + 1$  on peut affirmer qu'il existe  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  tel que  $|x_i| \geq 1$ . Comme on a fait à la question 4.4.2. , on sait que si on pose  $x' = x - \text{sign}(x_i)e[i]$  alors  $\|x'\|_1 = n$ . On a alors  $m(x) = m(x' \pm e[i]) = m(x') = 1$  (on a utilisé la propriété (12) ci-dessus et l'hypothèse de récurrence).

Ceci finit la preuve du fait que  $m$  est constante de valeur 1 sur  $\mathbb{Z}^d$ .

**5.5. •** Soit  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ , harmonique tel que  $f(0) = 1$ , donc  $f \in E$ , ainsi :

$$V(f(Y_U)) = \mathbb{E}(f(Y_U)^2) - \mathbb{E}(f(Y_U))^2 = \mathbb{E}(f(Y_U)^2) - 1$$

car  $\mathbb{E}(f(Y_U)) = 1$  d'après la question **5.2.2.**

Par ailleurs, on a :  $\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = \|f\|_2^2 \leq \|m\|_2 = \mathbb{E}(m(Y_U)^2)$ , donc :  $V(f(Y_U)) \leq \mathbb{E}(m(Y_U)^2) - 1$ .

• Comme  $m$  est constante de valeur 1, on a  $\mathbb{E}(m(Y_U)^2) = 1$  donc  $V(f(Y_U)) \leq 0$  et par suite  $V(f(Y_U)) = 0$ . En posant  $\mu_0 = \mathbb{E}(f(Y_U))$  on a alors :  $\mathbb{E}((f(Y_U) - \mu_0)^2) = 0$  donc  $\|f - \mu_0\|_2 = 0$  et par suite  $f = \mu_0$ , donc  $f$  est constante de valeur  $\mu_0$ .

**5.6. Démonstration du résultat de Liouville :**

Soit  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

- **Premier cas :** Si  $f$  est harmonique positive et tel que  $f(0) = 1$  alors d'après ce qui précède,  $f$  est constante.

- **Deuxième cas :** Si  $f$  est harmonique minorée, on a  $f$  est minorée, donc

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, a < f(k)$$

Posons  $F = \frac{f-a}{f(0)-a}$

• On a  $F = \alpha f + \beta \mathbb{1}$  avec  $\alpha = \frac{1}{f(0)-a}$  et  $\beta = \frac{-a}{f(0)-a}$  et  $\mathbb{1}$  est l'application constante sur  $\mathbb{Z}^d$  de valeur

1, donc  $F$  est harmonique sur  $\mathbb{Z}^d$ , vue comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques sur  $\mathbb{Z}^d$  (Il est aisé de prouver qu'une telle combinaison linéaire est harmonique).

•  $F \geq 0$  : clair.

•  $F(0) = 1$  : clair.

D'après le premier cas,  $F$  est constante sur  $\mathbb{Z}^d$ , par suite  $f = (f(0) - a)F + a\mathbb{1}$  est constante sur  $\mathbb{Z}^d$ .

- **Troisième cas** : Soit  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , harmonique et majorée, alors  $(-f)$  est harmonique minorée, donc d'après le deuxième cas ci-dessus,  $(-f)$  donc  $f$  est constante. Ceci termine la preuve du résultat de Liouville.