Correction proposée par :
EL Amdaoui Mustapha
elamdaoui@gmail.com

1ère partie
Étude de solutions des équations différentielles de Bessel d'indice entier

1.1. u étant de $\mathcal{C}^2$ et non nulle sur $]0,+\infty[$, alors par produit v est de $\mathcal{C}^2$ et non nulle sur $]0,+\infty[$ et par la formule de Leibniz, on obtient :

$$\forall t>0,\quad v''(t)=\sqrt{t}u''(t)+\frac{u'(t)}{\sqrt{t}}-\frac{u(t)}{4\sqrt{t}^3}$$

Puis, pour $t>0$, on a :

$$\begin{aligned}
v''(t)+\sigma_n(t)v(t) &= \sqrt{t}u''(t)+\frac{u'(t)}{\sqrt{t}}-\frac{u(t)}{4\sqrt{t}^3}+\sqrt{t}\left(1+\frac{1-4n^2}{4t^2}\right)u(t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{t}^3}\underbrace{\left[t^2u''+tu'(t)+\left(t^2-n^2\right)u(t)\right]}_{=0}\\
&= 0
\end{aligned}$$

1.2.

1.2.1. La fonction y_n est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, car c'est la somme d'une série entière de rayon R, et pour tout $t\in\,]-R,R[$, on a :

$$\begin{aligned}
ty_n'(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)a_kt^{n+k}\\
t^2y_n''(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)a_kt^{n+k}
\end{aligned}$$

L'équation $(\mathscr{B}_n)$ équivaut à

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)(k+n-1)a_kt^{n+k}+\sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)a_kt^{n+k}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^{n+k+2}-n^2\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^{n+k}=0$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k(2n+k)a_kt^{n+k}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^{n+k+2}=0$$

Avec le changement d'indice $k'=k+2$ dans le second terme du premier membre, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k(2n+k)a_kt^{n+k}+\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}t^{n+k}=0$$

Ou encore

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(k(2n+k)a_k+a_{k-2}\right)t^{n+k}+(2n+1)a_1t=0$$

Ceci fournit $\begin{cases}a_1=0\\ k(2n+k)a_k+a_{k-2}=0\quad\forall k\geqslant 2\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a_1=0\\ (k+2)(2n+2+k)a_{k+2}+a_k=0\quad\forall k\geqslant 0\end{cases}$

2.1.2. Par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$

- Pour $k=0$ les deux formules sont vraies

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\begin{cases} a_{2k+1} = 0 \\ a_{2k} = a_0 n!\, \dfrac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} \end{cases}$
  - $a_{2k+3} = -\dfrac{a_{2k+1}}{(2k+3)(2n+3+2k)} = 0$
  - De même

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2n+2+2k)} = -\frac{a_{2k}}{2^2(k+1)(n+1+k)} \\ &\overset{\text{(HR)}}{=} \frac{-1}{2^2(k+1)(n+1+k)} a_0 n!\, \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} \\ &= a_0 n!\, \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+2}(k+1)!\,(n+k+1)!} \end{aligned}$$

Récurrence achevée

1.3.
- On pose $a_k = \dfrac{1}{k!\,(n+k)!}$. Par le critère de D'Alembert $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{1}{(k+1)(n+k+1)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!\,(n+k)!} z^k$ est $+\infty$
- On pose $b_k = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} z^{2k}$. Pour $z = 0$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k$ converge absolument et pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $\left|\dfrac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \dfrac{|z|^2}{(k+1)(n+k+1)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k$ est absolument convergente et, par suite, le rayon de convergence $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} z^{2k}$ vaut $+\infty$

1.4. On considère la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2k+1} = 0 \\ a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!\,(n+k)!} \end{cases}$. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ est de rayon $+\infty$ et la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ vérifie bien les contraintes de la question $(1.2.2)$ avec $a_0 = \dfrac{1}{2^n n!}$

1.5.

1.5.1. $G_n(0) = \dfrac{1}{n!} > 0$, et par continuité de G_n, il existe donc $\beta > 0$ tel que $G_n(t) > 0$, pour tout $t \in]-\beta, \beta[$

1.5.2. Pour $t \geqslant \beta > 0$, alors $G_n(t)$ est somme d'une série à termes strictement positifs, donc $G_n(t) > 0$ et pour $t \in]-\beta, \beta[$, $G_n(t) > 0$. Par exclusion les zéros de G_n sont dans $]-\infty, -\beta]$

1.5.3. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\frac{t}{2}\right)^n G_n\left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(n+k)!} \left(-\frac{t}{2}\right)^k = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} t^{2k} = J_n(t)$$

Si $t \in]0, +\infty[$ est zéro de J_n alors $-\dfrac{t^2}{4}$ est zéro de G_n, donc $-\dfrac{t^2}{4} \leqslant -\beta$, soit $t \geqslant 2\sqrt{\beta}$

2ème partie
Quelques résultats utiles pour la suite

2.1.

2.1.1. La fonction G_n est la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$G_n^{(p)}(t) = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!} \frac{1}{k!\,(n+k)!} t^{k-p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(k+p+n)!} t^k$$

2.1.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto t^n G_n(t)$ est somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^n G_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(k+n)!} t^{n+k}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{k!\,(k+n)!} t^{n+k}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(k+n+1)!} x^{n+k+1} \\
&= x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(k+n+1)!} x^k \\
&= x^{n+1} G_n'(x)
\end{aligned}$$

2.1.3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto x^{n+p} G_n'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et par la formule du produit

$$\begin{aligned}
\left(x^{n+p} G_n'(x)\right)' &= \left(x^{p-1} x^{n+1} G_n'(x)\right)' \\
&= (p-1) x^{n+p-1} G_n'(x) + x^{p-1} \underbrace{\left(x^{n+1} G_n'(x)\right)'}_{= x^n G_n(x)} \\
&= x^{n+p-1} \left(G_n(x) + (p-1) G_n'(x)\right)
\end{aligned}$$

2.1.4. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$

- Pour $p = 0$, on a $\displaystyle\int_0^x t^n G_n(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1} G_n'(x)$, alors $A_0 = 0$ et $B_0 = 1$ répondent à la question
- Soit $p \geqslant 0$. Par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{n+p+1} G_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x t^{p+1} t^n G_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t^{p+1} \left(t^{n+1} G_n'(t)\right)'\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t^{n+p+2} G_n'(t)\right]_0^x - (p+1) \int_0^x t^{n+p+1} G_n'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= x^{n+p+2} G_n'(x) - (p+1) \int_0^x t^{n+p+1} G_n'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{n+p+1} G_n'(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t^{n+p+1} G_n(t)\right]_0^x - (n+p+1) \int_0^x t^{n+p} G_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= x^{n+p+1} G_n(x) - (n+p+1) \int_0^x t^{n+p} G_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe deux polynômes A_p et B_p à coefficients entiers,

$$\int_0^x t^{n+p} G_n(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1} \left(A_p(x) G_n(x) + B_p(x) G_n'(x)\right)$$

Alors

$$\int_0^x t^{n+p+1} G_n(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1} \left(A_{p+1}(x) G_n(x) + B_{p+1}(x) G_n'(x)\right)$$

Avec

$$\begin{cases} A_{p+1} &= (p+1)(n+p+1) A_p - (p+1) X^p \\ B_{p+1} &= X^{p+1} + (p+1)(n+p+1) B_p \end{cases}$$

Les deux polynômes A_{p+1} et B_{p+1} sont à coefficients entiers car A_p et B_p le sont. Avec $\mathrm{deg}(\mathrm{A}_{\mathrm{p}+1}) = \mathrm{p}$ et $\mathrm{deg}(\mathrm{B}_{\mathrm{p}+1}) = \mathrm{p}+1$

2.1.5. Des formules précédentes, on tire

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad B_{p+1}(0) = (p+1)(n+p+1)B_p(0)$$

et

$$\begin{cases} A_0(0) = 0, \quad A_1(0) = -1 \\ A_{p+1}(0) = (p+1)(n+p+1)A_p(0), \quad \forall p \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit

$$B_p(0) = \frac{p!\,(p+n)!}{n!} \quad \text{et} \quad A_p(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ -\dfrac{p!\,(p+n)!}{(n+1)!} & \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}$$

2.1.6. Soit x un zéro de $\mathbb{R}$. Par absurde on suppose que $G_n'(x) = 0$, alors $x < 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^x t^{n+p} G_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Notons $f_n\ :\ t \longmapsto t^n G_n(t)$. Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_0^x P(t)\, f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction f_n est continue sur $[x, 0]$. Donc, d'après théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[x, 0]$ vers f_n.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [x, 0]$, en écrivant

$$\left| f_n(t)^2 - f_n(t)P_m(t) \right| = |f_n(t)\,(f_n(t) - P_m(t))|$$

et il en résulte que la suite $(f_n P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_n^2 sur $[x, 0]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_x^0 f_n(t)^2\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to+\infty} \int_x^0 f_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$\int_x^0 f_n(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction f_n^2 étant continue positive sur le segment $[x, 0]$ d'intégrale nulle, donc $f_n = 0$, ainsi la nullité de f_n. En particulier $\forall t \in [x, 0[$, $G_n(t) = 0$ et par continuité $G_n(0) = 0$. Ce qui est absurde

2.2.

2.2.1. L'application $\dfrac{g}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2} = 0$, donc $\dfrac{g}{f}$ est constante, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda f$. Les deux fonctions f et g sont à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ en conséquence $\lambda \in \mathbb{C}^*$

2.2.2. Soit u et v les parties réelle et imaginaire de h, ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et la contrainte $|h| = 1$ donne $u^2 + v^2 = 1$, en particulier $u'u + v'v = 0$. L'application $t \longmapsto \dfrac{h'(t)}{h(t)}$ est continue, donc $t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{h'(s)}{h(s)}\,\mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puis θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\theta'(t) = -i\dfrac{h'(t)}{h(t)}$.
Pour $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{h'(s)}{h(s)}\,\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^t h'(s)\bar{h}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^t \Big[\underbrace{(u'(s)u(s) + v'(s)v(s))}_{=0} + i(u(s)v'(s) - u'(s)v(s))\Big]\,\mathrm{d}s \\ &= i\int_{t_0}^t (u(s)v'(s) - u'(s)v(s))\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Ceci montre que θ est à valeurs réelles.

Soit $f\ :\ \ t\longmapsto e^{i\theta(t)}$. Par coposition f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et telle que $\dfrac{h'(t)}{h(t)}=i\theta'(t)=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$, donc il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $h=\alpha e^{i\theta}$. En particluier $e^{i\theta(t_0)}=h(t_0)=\lambda e^{i\theta(t_0)}$, donc $\lambda=1$

2.2.3.

(i) Notons u et v les parties réelle et imaginaire de f. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc u^2+v^2 l'est aussi et est srtictement positve donc $t\longmapsto\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

(ii)
- **Existence :** Soit $h=\dfrac{f}{|f|}$, une telle application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de norme 1, d'après la question (2.2.2) il existe $\theta:\ I\longmapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant :

$$\theta(t_0)=\theta_0\quad\text{et}\quad\forall t\in I,\quad h(t)=e^{i\theta(t)}$$

Soit

$$\theta(t_0)=\theta_0\quad\text{et}\quad\forall t\in I,\quad f(t)=|f(t)|\,e^{i\theta(t)}$$

- **Unicité :** Soit $\theta,\beta:\ I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant les deux contraintes. Alors $i\theta'=\dfrac{(e^{i\theta})'}{e^{i\theta}}=\dfrac{(e^{i\beta})'}{e^{i\beta}}=i\beta'$. Donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\theta=\beta+\lambda$, avec $\theta(t_0)=\beta(t_0)$, on obtient $\theta=\beta$

2.3. Procédons par récurrence sur p. La formule est vraie pour $p=1$ (c'est la formule d'intégration par parties classique). Supposons la vraie au rang $p-1$ et prouvons-la au rang p. Soit $h=f'$, qui est de classe C^{p-1}. La formule au rang $p-1$ appliquée à h et g donne

$$\int_a^b h^{(p-1)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^{p-1}\int_a^b h(t)g^{(p-1)}(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}\big(h^{(p-1-k)}(b)g^{(k-1)}(b)-h^{(p-1-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\big)$$

soit

$$\int_a^b f^{(p)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^{p-1}\int_a^b f'(t)g^{(p-1)}(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}\big(f^{(p-k)}(b)g^{(k-1)}(b)-f^{(p-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\big)$$

Il suffit alors d'intégrer par parties le premier terme du second membre, alors

$$\int_a^b f'(t)g^{(p-1)}(t)\,\mathrm{d}t=f(b)g^{(p-1)}(b)-f(a)g^{(p-1)}(a)-\int_a^b f(t)g^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t$$

pour obtenir le résultat.

3ème partie

Étude des zéros des solutons d'une équation différentielle d'ordre 2

3.1. Les deux fonctions φ et ψ sont continues sur I, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, le problème de Cauchy

$$\begin{cases}u''+\varphi u'+\psi u=0\\ u(t_0)=x_0\ ,u'(t_0)=x_0'\end{cases}\qquad x_0,x_0'\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad t_0\in I$$

admet une et une seule solution

3.2. Soit u une solution sur I, non identiquement nulle, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$

3.2.1. Si $u'(t_0)=0$, alors par unicité de la solution du problème de Cauchy $u=0$, ce qui est absurde.
Par continuité de u' il existe $\eta>0$ tel que $\forall t\in I\cap\,]t_0-\eta,t_0+\eta[\,,\ u'(t)\neq 0$ et soit $t\in I\cap\,]t_0-\eta,t_0+\eta[\,\setminus\{t_0\}$. Si $u(t)=0$, alors par le théorème de Rolle il existe c compris strictement entre t_0 et t, donc dans $I\cap\,]t_0-\eta,t_0+\eta[$, tel que $u'(c)=0$, ce qui est absurde

3.2.2 Supposons que $Z_u \cap [a,b]$ est infini. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments deux à deux distincts de $Z_u \cap [a,b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergente vers $t_0 \in Z_u \cap [a,b]$ (Rappelons que $Z_u \cap [a,b] = u^{-1}(\{0\})$ est un fermé). On fait appel au théroème de Rolle, il existe y_n compris entre $x_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(n+1)}$ tel que $u'(y_n) = 0$. La suite $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t_0$ par le théorème des gendarmes et par continuité de u', on a $u'(t_0) = 0$. Bref il existe $t_0 \in I$ tel que $u(t_0) = u'(t_0) = 0$, ce qui est absurde car u est non identiquement nulle

3.3.

3.3.1. Sinon il existe $t \in I$ tel que $\rho(t) = 0$, soit $u(t) = u'(t) = 0$, donc u est nulle. Ce qui est absurde.

3.3.2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ comme somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et elle ne s'annule pas, alors d'après la question **(2.2.3)** il existe $\theta \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in I, \quad f(t) = |f(t)|\, e^{i\theta(t)}$ qui se traduit à

$$\forall t \in I, \quad u(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \quad \text{ et } \quad u'(t) = \rho(t)\sin(\theta(t))$$

3.3.3. On dérive u et u' on obtient $\begin{cases} \rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta = u' \\ \rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta = u'' = -u\psi \end{cases}$. On multiplie la première égalité par $u' = \rho\sin\theta$ et la deuxième par $u = \rho\cos\theta$, on obtient $\begin{cases} \rho\rho'\sin\theta\cos\theta - \rho^2\theta'\sin^2\theta = u'^2 \\ \rho\rho'\sin\theta\cos\theta + \rho^2\theta'\cos^2\theta = -u^2\psi \end{cases}$, puis par soustraction on obtient $\theta' = \dfrac{-u^2\psi - u'^2}{u^2+u'^2}$. Les fonctions $u^2\psi$ et u'^2 sont positives et elles ne peuvent pas s'annuler au même temps, donc pour tout $t \in I$, $\theta'(t) < 0$, soit θ est strictement décroissante sur I

3.3.4. Soit $\lambda > 0$ un minorant de ψ

(i) Soit $t \in I$, on a $(u(t), u'(t)) \neq (0,0)$ et

$$\theta'(t) = -\frac{u^2\psi + u'^2}{u^2+u'^2} \leqslant -\frac{\lambda u^2 + u'^2}{u^2+u'^2} \leqslant -\min(1,\lambda)$$

(ii) θ est continue et strictement décroissante sur $I = [\alpha, +\infty[$, donc c'est une bijection de $I = [\alpha,+\infty[$ vers $\theta(I) = \left]\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t), \theta(\alpha)\right]$. L'inégalité précédente montre que $\forall t \in I, \quad \theta(t) \leqslant -\min(1,\lambda)(t-\alpha) + \theta(\alpha)$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t) = -\infty$

(iii) Soit $t \geqslant \alpha$, alors

$$\begin{aligned} t \in Z_u \quad &\Longleftrightarrow \quad u(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta(t) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta(t) = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Donc $Z_u = \left\{t \geqslant \alpha \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta(t) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} = \left\{\theta^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ ; \ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant \theta(\alpha)\right\}$.

Pour finir, on pose $k_0 = E\left(\dfrac{\theta(\alpha)}{\pi} - \dfrac{1}{2}\right)$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \theta^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2} + (k_0 - n)\pi\right)$.

On a bien $Z_u = \{x_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante tendant vers $+\infty$

3.4. Soit u_γ la restriction de u à $I_\gamma = [\gamma, +\infty[$. la solution u_γ vérifie les conditions de la question **(3.3.4)**, donc les zéros de u sur I_γ forment une suite strictement croissante vers $+\infty$. En outre d'après la question **(3.2.2)** l'ensemble $Z_u \cap [\alpha, \gamma]$ est fini. Par concaténation les zéros de la solution u sur I forment une suite qui tend vers $+\infty$ et qui est strictement croissante à partir d'un certain rang.

3.5. D'après la question **(1.5.3)**, il existe $\beta >$ tel que les zéros de J_n sur l'intervalle $]0,+\infty[$ sont dans $\left[2\sqrt{\beta}, +\infty\right[$. D'après la question **(1.1)** l'application $v \ : \ t \longmapsto \sqrt{t}J_n(t)$ est solution de $(\mathcal{E}_{\sigma_n})$ sur $\left[2\sqrt{\beta}, +\infty\right[$, avec $\sigma_n(t) = 1 + \dfrac{1-4n^2}{4t^2} = \dfrac{1+4(t^2-n^2)}{4t^2}$ qui est strictement positive et minorée par $\lambda = \dfrac{1}{4\gamma^2} > 0$ sur $[\gamma, +\infty[$, avec $\gamma > \max(n, 2\sqrt{\beta})$. D'après la question **(3.4)** l'application les zéros de v sur $\left[2\sqrt{\beta}, +\infty\right[$ forment une suite qui tend vers $+\infty$ et qui est strictement croissante à partir d'un certain rang. Pour conclure le résultat il suffit de voir que v et J_n ont même zéros sur $]0, +\infty[$

4^{ème} partie

Irrationnalité des zéros de la fonction J_n de Bessel

4.1. On appelle la formule de binoôme de Newton, il vient que $U_p(x) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{\binom{p}{k}}{p!} x^{n+p+k}$ et par définition de L_p, on aura $L_p(x) = U_p^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{\binom{p}{k}}{p!} \frac{(n+p+k)!}{(n+k)!} x^{n+k} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p+k}{n+k} x^{n+k}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors par le changement de variable $t \longmapsto xt$, on a :

$$T_p(x) = \frac{1}{x}\int_0^x G_n(t) L_p\left(\frac{t}{x}\right) \mathrm{d}t$$

On remplace L_p par son expression dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et on poursuit le calcul

$$\begin{aligned}
T_p(x) &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p+k}{n+k} \frac{1}{x^{n+k+1}} \int_0^x t^{n+k} G_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(2.1.4.)}{=} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p+k}{n+k} \frac{1}{x^{n+k+1}} x^{n+1}\left(A_k(x)G_n(x) + B_k(x)G_n'(x)\right) \\
&= \frac{1}{x^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p+k}{n+k} x^{p-k}\left(A_k(x)G_n(x) + B_k(x)G_n'(x)\right) \\
&= \frac{Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G_n'(x)}{x^p}
\end{aligned}$$

Avec

$$Q_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p+k}{n+k} X^{p-k} A_k \quad \text{et} \quad R_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p+k}{n+k} X^{p-k} B_k$$

- Les poynômes Q_p et R_p sont bien à coefficients entiers, car ils sont combinaisons linéaires des polynômes à coefficients entiers de coefficients entiers, donc ils vérifient la contrainte (i).
- $Q_0 = A_0 = 0$, $R_0 = B_0 = 1$ et pour tout $p \geqslant 1$, on a $R_p(0) = (-1)^p\binom{n+2p}{n+p}B_p(0) \neq 0$ et $Q_p(0) = (-1)^p\binom{n+2p}{n+p}A_p(0) \neq 0$. Donc la deuxième contrainte (ii) est vérifiée
- Soit $p \geqslant 1$. Pour chaque $k \in [\![0,p]\!]$ $\mathrm{degA_k} \leqslant \mathrm{k}-1$ et $\mathrm{degB_k} \leqslant \mathrm{k}$, donc $\mathrm{degX^{p-k}A_k} \leqslant \mathrm{p}-1$ et $\mathrm{degX^{p-k}B_k} \leqslant \mathrm{p}$, alors par combinaisons linéaires $\mathrm{degQ_p} \leqslant \mathrm{p}-1$ et $\mathrm{degR_p} \leqslant \mathrm{p}$. Ainsi la troisième contrainte (iii) est vérifiée

4.2. les deux fonctions $t \longmapsto G_n(xt)$ et $t \longmapsto U_p(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[0,1]$ et pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ et $t \in [0,1]$, $(G_n(xt))^{(k)} = x^k G_n^{(k)}(xt)$, alors par la formule d'intégration par parties itérée

$$\begin{aligned}
T_p(x) &= \int_0^1 G_n(xt) U_p^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^p \int_0^1 (G_n(xt))^{(p)} U_p(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[x^{p-k}G_n^{(p-k)}(xt)U_p^{(k-1)}(t)\right]_0^1
\end{aligned}$$

Comme 0 (resp. 1) est racine de U_p d'ordre $n+p$ (resp. p), alors $\forall i \in [\![0,p-1]\!]$, $U_p^{(i)}(0) = U_p^{(i)}(1) = 0$, puis $\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left[x^{p-k}G_n^{(p-k)}(xt)U_p^{(k-1)}(t)\right]_0^1 = 0$, soit

$$T_p(x) = (-1)^p \int_0^1 (G_n(xt))^{(p)} U_p(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^p x^p \int_0^1 G_n^{(p)}(xt) U_p(t)\,\mathrm{d}t$$

4.3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\left|(xt)^k t^{n+p}(1-t)^n\right| \leqslant |x|^k$$

Alors

$$\left|G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(n+k+p)!}(xt)^k \frac{t^{n+p}(1-t)^n}{p!}\right| \leqslant \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!\,(n+k+p)!} \leqslant \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!} = \frac{e^{|x|}}{p!}$$

On conclut, donc

$$\left|\int_0^1 G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{e^{|x|}}{p!}$$

4.4. Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x = 0$. Pour $p \geqslant 1$, on a :

$$\begin{cases} Q_p(0) = (-1)^p\binom{n+2p}{n+p}A_p(0) = -(-1)^p\binom{n+2p}{n+p}\dfrac{p!\,(p+n)!}{(n+1)!} \\ R_p(0) = (-1)^p\binom{n+2p}{n+p}B_p(0) = (-1)^p\binom{n+2p}{n+p}\dfrac{p!\,(p+n)!}{n!} \\ G_n(0) = \dfrac{1}{n!} \text{ et } G_n'(0) = \dfrac{1}{(n+1)!} \end{cases}$$

Donc $Q_p(0)G_n(0) + R_p(0)G_n'(0) = 0 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

- Si $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G_n'(x)| &= |x^pT_p(x)| \\ &= x^{2p}\left|\int_0^1 G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x^{2p}\frac{e^{|x|}}{p!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Bref la suite $\left(Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G_n'(x)\right)_{p\geqslant 1}$ converge vers 0

4.5. Remarquons d'abord que $Q_pR_{p-1} - Q_{p-1}R_p$ est un polynôme et

$$\mathrm{deg}\left(\mathrm{Q_pR_{p-1} - Q_{p-1}R_p}\right) \leqslant \max\left(\mathrm{degQ_pR_{p-1}, degQ_{p-1}R_p}\right) \leqslant 2(\mathrm{p}-1)$$

car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{degR_k} \leqslant \mathrm{k}$ et $\mathrm{degQ_k} \leqslant \mathrm{k}-1$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on part des égalités

$$\begin{cases} x^pT_p(x) &= Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G_n'(x) \\ x^{p-1}T_{p-1}(x) &= Q_{p-1}(x)G_n(x) + R_{p-1}(x)G_n'(x) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x^pT_p(x)R_{p-1}(x) &= Q_p(x)R_{p-1}(x)G_n(x) + R_p(x)R_{p-1}G_n'(x) \\ x^{p-1}T_{p-1}(x)R_p(x) &= Q_{p-1}(x)R_p(x)G_n(x) + R_p(x)R_{p-1}(x)G_n'(x) \end{cases}$$

On tire alors

$$G_n(x)\left(Q_p(x)R_{p-1}(x) - Q_{p-1}(x)R_p(x)\right) = x^pT_p(x)R_{p-1}(x) - x^{p-1}T_{p-1}(x)R_p(x)$$

On introduit $\tilde{T}_p(x) = (-1)^p\displaystyle\int_0^1 G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\,\mathrm{d}t$, on a $T_p(x) = x^p\tilde{T}_p(x)$ et on obtient alors

$$G_n(x)\left(Q_p(x)R_{p-1}(x) - Q_{p-1}(x)R_p(x)\right) = x^{2p-2}\left(x^2\tilde{T}_p(x)R_{p-1}(x) - \tilde{T}_{p-1}(x)R_p(x)\right)$$

Ce qui montre que $Q_p(x)R_{p-1}(x) - Q_{p-1}(x)R_p(x) = \lambda x^{2p-2} + \circ\left(x^{2p-2}\right)$, avec λ vaut $\dfrac{-\tilde{T}_{p-1}(0)R_p(0)}{G_n(0)} \neq 0$, car $R_p(0) \neq 0$ et $\tilde{T}_{p-1}(0) = (-1)^pG_n^{(p)}(0)\displaystyle\int_0^1 U_p(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ car U_p garde un signe constant sur $[0,1]$. Bref $Q_pR_{p-1} - Q_{p-1}R_p$ est un polynôme de valuation $2p-2$, ainsi le résultat demandé

4.6. Soit p un entier non nul et x un réel non nul. Si $(T_{p-1}(x), T_p(x)) = (0,0)$, alors le sytème d'inconnues $G_n(x), G'_n(x)$

$$\begin{cases} Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G'_n(x) & = 0 \\ Q_{p-1}(x)G_n(x) + R_{p-1}(x)G'_n(x) & = 0 \end{cases}$$

dont le déterminant $\lambda x^{2p-2} \neq 0$, est de Cramer, donc il admet une seule solution $G_n(x) = G'_n(x) = 0$. Ce qui est absurde

4.7. Soit x un zéro de G_n et par absurde on suppose qu'il est rationnel, c'est-à-dire $x = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. La contrainte **(4.1.(i))** donne $\forall p \geqslant 1, \quad R_p(x)G'_n(x) = x^p T_p(x)$ et l'inégalité obtenue en **(4.3)** montre que

$$|b^p R_p(x)| \leqslant \frac{1}{|G'_n(x)|} \frac{a^{2p}}{|b^p|} \frac{e^{|x|}}{p!} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

d'où à partir d'un certain rang p_0, on a $|b^p R_p(x)| < 1$. Or R_p est à coefficients entiers donc $b^p R_p(x) \in \mathbb{Z}$, alors $\forall p \geqslant p_0, \quad b^p R_p(x) = 0$ puis $R_p(x) = 0$. Revenons à **(4.1.(i))** on obtient $\forall p \geqslant p_0, \quad T_p(x) = 0$ ce qui contredit le résultat de **(4.6)**

4.8. Soit x un zéro de J_n, alors $-\dfrac{x^2}{4}$ est zéro de G_n, donc il est irrationnel puis x^2 est irrationnel et, par suite, x est irrationnel