Énoncé de Maths CNC .mp.2020

Exercice 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale.(4pts

1. Montrer que pour tout réel x,la fonction $t \to e^{tx-t^2}$ est integrable sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite de cet exercice , on note f la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2} dt$$
3. Montrer que $f'(0) = 0$.
4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + xf'(x) = 2f"(x)$.
5. En déduire que, pour tout réel x, $xf(x) - 2f'(x) = 0$.
6. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2}$ Montrer que,pour tout réel x,$f(x) = e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 2

Etude d'une série de fonction et calcul de sa somme (4pts)

On considère la suite$(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
   Dans la suite ,on notera g sa somme :$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ $\qquad x \geq 0$.
2. Justifier que g est continue sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.
4. En admettant que $g(0) = \ln(2)$ donner une expression simple de l'aide de fonctions usuelles.

Problème

Recherche d'hyperplans stable pas produit matriciel

Notation

Dans tout ce problème $\mathbb{C}$ désigne le coprs des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.Si $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes , et à coefficients dans $\mathbb{C}$.Pour$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}),^t A$ désigne la matrice transposée de A et rg(A) son rang.
Si p=n ,$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est noté simplement :$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes; $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$,on note Tr(A) la trace de A et A^{-1} l'inverse de A si A est dans $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$.
Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des nombres complexes on note $diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ pris dans cette ordre.
Dans ce problème $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^*$ désigne le dual de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On rappel qu'il s'agit du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; il est de dimension finie et on a :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2.$$

1

1^{ier} Partie

un isomorphisme canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans son dual.

Pour tout couple (i,j)de$\{1, 2, ...n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et j-ième colonne valant 1 ;on rappelle que $(Ei, j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que :

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, ..., n\}^4 \ Ei, jE_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

$\delta_{j,k}$ étant le symbole de Kroneker valant 1 si j=k 0 si non.

1.1

vérifier que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $T_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, M \to Tr(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2

On note$\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^*$ l'application définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \phi(A) = T_A.$$

1.2.1

Vérifier que ϕ est une application linéaire.

1.2.2

Monter que ϕ est injective. Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\psi = T_A$.

1.3

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.Justifier qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que :$\mathcal{H} = Ker(T_A)$.

1.4

Soient A et B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,avec $A \neq O$.Montrer que si $Ker(T_A) \subset Ker(T_B)$ alors il existe $\lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = \lambda A$.

1.5

Montrer que si M et N $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,alors Tr(MN)=Tr(NM).

1.6

Soit M et N deux matrices semblables et soit P $\in \mathbb{GM}_n(\mathbb{C})$ tellle que A=PBP^{-1} ;on note $\mathcal{H}_\mathcal{A} = KerT_A$ et $\mathcal{H}_\mathcal{B} = KerT_B$.
Montrer que $\mathcal{H}_\mathcal{A} = P\mathcal{H}_\mathcal{B}P^{-1} = \{PMP^{-1}; M \in \mathcal{H}_\mathcal{B}\}$.

2

2^{ier} Partie

Etude du noyau $Ker(T_A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle.

On considère une matrice non nulle A $\in$ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que Tr(A) =0 et on pose $\mathcal{H}_\mathcal{A} = KerT_A$.

2.1

Justifier que $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .Quelle est sa dimension ?

2.2

On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on note R=$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et P $\in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices telles que :$A = PRP^{-1}$.

2.2.1

Vérifier que $\mu = -\lambda \neq 0$

2.2.2

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$=$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}; (a, b, c,) \in \mathbb{C}^3\}$.

2.2.3

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ n'est pas stable par le produit matriciel.

2.2.4

En déduire que $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ n'est pas stable par le produit matriciel.

2.3

On suppose ici que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2.3.1

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et P $\in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que A=PRP^{-1} avec R=$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; (a, b, d) \in \mathbb{C}^3\}$.

2.3.3

Montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ sont stables par le produit matriciel.

3

3^{ier} Partie

Etude des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel.

Dans cette parie on suppose qu il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel et on cherche à montrer que n=2 puis on détermine de tels hyperplans stables ;on note ψ une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{H} = Ker\psi$

3.1

On cherche à montrer que $I_n \in \mathcal{H}$;raisonnons par l'absurde que $I_n \notin \mathcal{H}$.

3.1.1

Vérifier que $\psi(I_n) \neq 0$.

3.1.2

Soit M $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $M^2 \in \mathcal{H}$; on pose $\lambda = \frac{\psi(M)}{\psi(I_n)}$
(i) Montrer que :$(M - \lambda I_n)^2 \in \mathcal{H}$.
(ii) En déduire que $((\lambda)^2 I_n - 2\lambda M) \in \mathcal{H}$
(iii) Montrer que $\lambda = 0$ et conclure que $M \in \mathcal{H}$.

3.1.3

Montrer que pour tout couple (i,j) élément de$\{1, 2, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$, $E_{i,j} \in \mathcal{H}$

3.1.4

En déduire que pour tout i élément de $\{1, 2, ..., n\}$,$E_{i,i} \in \mathcal{H}$.

3.1.5

Conclure.
On a donc $I_n \in \mathcal{H}$;on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que : $\mathcal{H} = KerT_A$.

3.2

Soit $M \in \mathcal{H}$.Montrer que :$KerT_A C KerT_{AM}$ et en déduire qu'il existe $\lambda_M \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A(M - \lambda_M I_n) = O$$

3.3

En déduire que $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} + \mathbb{C}I_n$ ou $\mathcal{F} = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); AN = O\}$.

3.4

Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et qu'il est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}, Ker\varphi_A)$ des applications linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $Ker\varphi_A$. ou φ_A désigne l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{C})\,;\, \varphi_A(X) = AX.$$

3.5

Montrer que $dim_C\mathcal{F} = n(n - rg(A))$ et en déduire que $nrg(A) \leq 2$.

3.6

Conclure que n=2.

3.7

Déterminer alors les hyperplans de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stables par le produit matriciel.
On remarque qu'un tel hyperplan est de la forme $KerT_A$,avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle et en utilisant les résultats de la deuxième partie.