ROYAUME DU MAROC
المملكة المغربية

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2015
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique

ENSEM

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission dans les Établissements de Formation

d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Édition 2015

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Filière **PSI**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Problème 1
Étude d'une fonction définie par une intégrale

1ère Partie
Convergence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

1.1. Convergence de l'intégrale en question

1.1.1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1.1.2. Montrer que, pour tout couple (ε, a) de réels tels que $0 < \varepsilon < a$, on a

$$\int_\varepsilon^a \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1-\cos a}{a} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^a \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

1.1.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

1.2. Calcul d'une intégrale auxiliaire.

1.2.1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$. Que vaut la somme $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$?

1.2.2. On prolonge la fonction $t \longmapsto \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$ par continuité en 0. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

1.3. On considère la fonction g définie sur le segment $[0,\pi]$ par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0\,; \\ \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$

1.3.1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1.3.2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\tfrac{2n+1}{2}t\,dt = \tfrac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} g'(t)\cos\tfrac{2n+1}{2}t\,dt$.

1.3.3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\tfrac{2n+1}{2}t\,dt \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.4. Calcul de l'intégrale en question

1.4.1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}\,dt \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

1.4.2. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

2$^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une fonction

2.1. Soit x un réel non nul.

2.1.1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

2.1.2. Montrer que, pour tout réel $a>0$,

$$\int_0^a \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt = \frac{1-\cos(xa)}{x(1+a)} + \frac{1}{x}\int_0^a \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt.$$

2.1.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt.$$

Dans la suite du problème, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt$, $x \neq 0$.

2.2. Montrer que la fonction f est impaire.

2.3. Étude de f au voisinage de $+\infty$

2.3.1. Montrer que, pour tout $x>0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.

2.3.2. Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt$ puis montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2.4. Sens de variation de f

2.4.1. Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{(x+u)^2}\,du$.

2.4.2. En déduire que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

2.5. Étude de la régularité de f sur $]0,+\infty[$

2.5.1. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale définissant h et montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ puis exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

2.5.2. Justifier que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $|h(x)-h(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

2.5.3. Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}\,dt$ et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.6. Étude de f à droite en 0

2.6.1. Montrer que, pour tout $x>0$, $\dfrac{\pi}{2} - f(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du$.

2.6.2. Montrer que, pour tout $x>0$, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du\right| \leq 1 + \ln(1+x) - \ln x$.

2.6.3. En déduire la limite de f en 0^+ et justifier que, pour tout $x>0$, $0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2} = \sup\limits_{t>0} f(t)$.

2.6.4. Montrer que, pour tout $x>0$, $0 < \dfrac{\frac{\pi}{2} - f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u(x+u)}\,du$ puis en déduire que la fonction $x \longmapsto \frac{\frac{\pi}{2}-f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra justifier et utiliser le fait que, pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$.

2.7. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **2.6.4.** précédente et dessiner l'allure de la courbe représentative de f.

2.8. Montrer que la fonction $x \longmapsto f^2(x)$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Problème 2
Étude d'un problème de DIRICHLET

Dans ce problème, le nombre d est un entier naturel strictement positif. On note $\|.\|_1$ la norme définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$, pour tout $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit $V(x)$ le voisinage discret (sous-entendu dans $\mathbb{Z}^d$) de x par : $V(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d\,;\, \|y - x\|_1 = 1\}$.

Ce voisinage est l'ensemble des plus proches voisins de x, il est fini de cardinal $2d$.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{Z}^d$, on note $I(A)$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $V(x) \subset A$ et ∂A le complémentaire dans A de $I(A)$. On remarquera que pour $A = \mathbb{Z}^d$ on a $I(A) = A$ et $\partial A = \emptyset$, et pour A fini de cardinal $< 2d$, on a $I(A) = \emptyset$ et $\partial A = A$.

On dit qu'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique sur $I(A)$ si, pour tout $x \in I(A)$,

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in V(x)} f(y).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

1ère Partie
Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

Dans les trois premières questions de cette partie, on prend $d = 1$.

3.1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique sur $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, quel que soit l'entier relatif k, on a $f(k + 2) - 2f(k + 1) + f(k) = 0$.

3.2. Montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel de dimension 2, préciser une base de cet espace.

3.3. Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, harmoniques sur $I(\mathbb{Z}^*)$, est un espace vectoriel de dimension 4, préciser une base de cet espace. On commencera par déterminer $I(\mathbb{Z}^*)$.

Dans la suite de cette partie, d est un entier strictement positif quelconque.

3.4. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, positive et harmonique sur $\mathbb{Z}^d$.

3.4.1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\ell \in V(k)$, $f(\ell) \leq 2d\, f(k)$.

3.4.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\ell \in \mathbb{Z}^d$, $f(\ell) \leq (2d)^{\|\ell - k\|_1}\, f(k)$.

3.4.3. Montrer que si $k \in \mathbb{Z}^d$ et $f(k) = 0$, alors f est la fonction nulle.

3.4.4. Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, alors, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^d$,

$$|\ln(f(\ell)) - \ln(f(k))| \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d).$$

2ème Partie
Problème de DIRICHLET sur le graphe $\mathbb{Z}^2$

Dans cette partie $d = 2$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est notée $(e[1], e[2])$.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont mutuellement indépendantes et de même loi, la loi uniforme sur l'ensemble $D_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$.

On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$Y_0 = (0, 0), \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + e[1] & \text{si } X_n = 1 \\ Y_n - e[1] & \text{si } X_n = -1 \\ Y_n + e[2] & \text{si } X_n = 2 \\ Y_n - e[2] & \text{si } X_n = -2 \end{cases}$$

Noter que chaque Y_n est un couple de variables aléatoires entières qu'on écrit $Y_n = (Y_{n,1}, Y_{n,2})$. La suite Y est appelée *une marche aléatoire symétrique* sur $\mathbb{Z}^2$, issue de $(0,0)$. On modélise ainsi l'évolution d'un point mobile sur $\mathbb{Z}^2$, qui à tout instant n choisit au hasard uniforme un des 4 plus proches voisins de sa position précédente Y_{n-1}.

Soit ν un entier ≥ 2, fixé dans ce qui suit.

4.1. Pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $\|a\|_1 < \nu$ on considère l'événement

$A_{a,\nu}$: "il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|a + Y_n\|_1 = \nu$."

4.1.1. Montrer que cet événement est certain, c'est-à-dire de probabilité égale à 1. On pourra commencer par montrer l'implication suivante :

Si pour tout n, $-\nu < a_1 + Y_{n,1} < \nu$ alors il n'existe pas d'entier j tel que $X_j = X_{j+1} = ... = X_{j+2\nu} = 1$.

On définit une variable aléatoire réelle T_a en posant, pour tout aléa $\omega \in \Omega$,

$$T_a(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \,;\, \|a + Y_n\|_1 = \nu\} & \text{si } \omega \in A_{a,\nu}\,; \\ 0 & \text{si } \omega \notin A_{a,\nu}. \end{cases}$$

4.1.2. Montrer que, pour tout sous-ensemble W de $\mathbb{R}^2$, $P(Y_{T_a} \in W) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(Y_m \in W \text{ et } T_a = m)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note K_m la boule discrète de rayon m, $K_m = \{x \in \mathbb{Z}^2 \,;\, \|x\|_1 \leq m\}$. On utilisera sans avoir à le prouver les propriétés évidentes $I(K_m) = K_{m-1}$ et $\partial K_m = \{x \in \mathbb{Z}^2 \,;\, \|x\|_1 = m\}$.

4.2. Soit φ une fonction de ∂K_ν dans $\mathbb{R}$. On définit une fonction $f : K_\nu \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$f(a) = \begin{cases} E\big(\varphi(a + Y_{T_{a,\nu}})\big) & \text{si } a \in K_{\nu-1}\,; \\ \varphi(a) & \text{si } a \in \partial K_\nu. \end{cases}$$

Il s'agit dans cette section de prouver que f est harmonique sur $I(K_\nu)$.

4.2.1. Montrer la relation

$$E\big(\varphi(a + Y_{T_a})\big) = \sum_{n \geq 2,\, z \in \partial k\nu} \varphi(z) P(T_a = n \text{ et } a + Y_n = z)$$

en justifiant l'existence de la somme et de l'espérance.

4.2.2. On suppose $\|a\|_1 \leq \nu - 2$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $z \in \partial K\nu$,

$$P(T_a = n \text{ et } a + Y_n = z) = \frac{1}{4} \sum_{b \in V(a)} P(T_b = n - 1 \text{ et } b + Y_{n-1} = z).$$

4.2.3. On suppose que $\|a\|_1 \leq \nu - 2$. Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{4} \sum_{b \in V(a)} f(b)$.

4.2.4. On suppose que $\|a\|_1 = \nu - 1$. Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{4} \sum_{b \in V(a)} f(b)$.

4.2.5. Conclure.

N.B. : *On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que f est la seule fonction harmonique sur K_ν qui coïncide avec φ sur ∂K_ν.*

FIN DE L'ÉPREUVE