1.2 Corrigé de l'épreuve:Math I-2017

Problème 1

Partie I

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par une intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\frac{\sin(kx)}{k}dx \\ &= \left[\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi k^2}\cos(kx)dx \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2}\left[\sin(kx)\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

2. (a) La règle de l'angle moitié permet d'écrire, $e^{ix}\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{x}{2}}\ e^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

   (b) On voit que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kx) = Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right)$, cependant $e^{ix} \neq 1$, car $0 < x \leq \pi$; alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$.

   D'après la question précédente $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kx) = Re\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

3.

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx &= \left[\psi(x)\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \psi^{'}(x)\frac{\cos(mx)}{m}dx \\ &= \frac{\psi(0) - (-1)^m\psi(\pi)}{m} + \int_0^\pi \psi^{'}(x)\frac{\cos(mx)}{m}dx.\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction ψ est de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$, alors .il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,\pi],\ \ |\psi^{'}(x)| \leq M$; ainsi;

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\quad \left|\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx\right| \leq \frac{|\psi(0)| + |\psi(\pi)|}{m} + \frac{M\pi}{m}.$$

donc en tendant m vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{m\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = 0$.

4. D'après les théorèmes généraux g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$, et on pour tout $x \in]0,\pi]$;

$$g^{'}(x) = \frac{1}{2}\frac{(\frac{x}{\pi} - 1)\sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})(\frac{x^2}{2\pi} - x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

On a $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\frac{x}{2}} = \dfrac{x}{2\pi} - 1$, Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = -1 = g(0)$ et ensuite g est continue sur $[0,\pi]$.
En plus, pour x voisin de 0, on a:

$$g^{'}(x) = \frac{1}{2}\frac{(\frac{x}{\pi} - 1)(\frac{x}{2} + \circ(x^2)) - \frac{1}{2}(1 + \circ(x))(\frac{x^2}{2\pi} - x)}{(\frac{x}{2} + \circ(x^2))^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{-x}{2} + \frac{x^2}{2\pi} + \circ(x^2) - \frac{1}{2}(-x + \frac{x^2}{2\pi} + \circ(x^2))}{\frac{x^2}{4} + \circ(x^2)}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g^{'}(x) = \frac{1}{2\pi}$. D'après le théorème de prolongement de la dérivée g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ et on a $g^{'}(0) = \dfrac{1}{2\pi}$.

5. (a) D'après les questions $(1.)$ et $(2.b)$, on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)dx\\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}dx\\
&= \int_0^{\pi} g(x)2\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})dx\\
&= \int_0^{\pi} g(x)\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin(\frac{x}{2})\right)dx\\
&= \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2\pi}-x)dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{6\pi}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx\\
&= \frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx
\end{aligned}$$

(b) D'après la question $(3.)$ avec $(m=\frac{2n+1}{2})$, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx=0$, alors en tendant n vers $+\infty$, dans la question précédente, on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

1. (a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\varphi_t(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$; en plus pour tout $t\in[0,+\infty[,\ \ 0\le\varphi_t(x)\le e^{-t}$ et $\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ est convergente; donc $\int_0^{+\infty}\varphi_t(x)dt$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$, c'est dire $f(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$ et ensuite $D_f=\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $x\in D_f,\ \ -x\in D_f$ et:

$$f(-x)=\int_0^{+\infty}\varphi_t(-x)dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+(-x)^2t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}dt=f(x).$$

Donc f est paire.

2. (a) Soit $t\in\mathbb{R}^+$; la fonction $x\mapsto 1+x^2t^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, alors $x\mapsto\frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et on a:

$$\forall\in\mathbb{R}^+,\ \ \varphi_t^{'}(x)=\frac{-2xt^2e^{-t}}{(1+x^2t^2)^2}.$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \ |\varphi_t^{'}(x)|=te^{-t}\frac{2tx}{1+x^2t^2}\frac{1}{1+x^2t^2}$.
Mais on sait bien que, $0\le\frac{2tx}{1+x^2t^2}\le 1$ et $0\le\frac{1}{1+x^2t^2}\le 1$, donc $0\le\frac{2tx}{1+x^2t^2}\frac{1}{1+x^2t^2}\le 1$ et ensuite, $|\varphi_t^{'}(x)|\le te^{-t}$.

(b) Soit $t,x\in\mathbb{R}^+$, et $h\in\mathbb{R}^*$ tels que $x+h\in R^+$. On voit que:

$$\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2}-\frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right|=|\varphi_t(x+h)-\varphi_t(x)|$$

La fonction φ_t vérifie les conditions du théorème des accroissements finies sur 'intervalle d'extrémités x et $x+h$, alors en utilisant la majoration de $|\varphi_t^{'}(x)|$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient d'après l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités x et $x+h$:

$$\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2}-\frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right|\le|x+h-x|te^{-t}=|h|te^{-t}.$$

(c) Montrons d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, pour tout $h \neq$ tel que $x+h \in \mathbb{R}^+$, on a :
$|f(x+h)-f(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}dt\right| = \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right)dt\right|$
$\leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| dt.$
D'autre part, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est convergente, puisque $t \mapsto\mapsto te^{-t}$ est continue de signe positif sur $[0,+\infty[$ et que $te^{-t} = \circ(\frac{1}{t^2})$; ainsi on peut intégrer l'inégalité ci dessus pour obtenir,

$$|f(x+h)-f(x)| \leq |h|\int_0^{+\infty} te^{-t}.$$

En tendant ensuite h vers 0, il vient que $\lim\limits_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)| = 0$ c'est à dire,
$\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, et donc f continue en tout point $x \in \mathbb{R}^+$.
f étant paire sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}^-$ et en conséquence sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leq y$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$0 < 1+x^2t^2 \leq 1+y^2t^2 \text{ et } \frac{1}{1+y^2t^2} \leq \frac{1}{1+x^2t^2}.$$

Par passage à l'intégrale, on obtient $f(x) \geq f(y)$; f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et puisque f est paire elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

4. (a) Soit $x > 0$, en effectuant le changement de variable $u = tx$, $t = 0 \Rightarrow u = 0$, $t \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$; il vient que:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du.$$

(b) D'après la question précédente, on obtient l'encadrement suivant de $f(x)$:

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du = [\arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

En tendant x vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. (a) Soit $x > 0$. On a:

$$\begin{aligned}
\forall u \in [0,\sqrt{x}], \quad -\frac{\sqrt{x}}{x} \leq -\frac{u}{x} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \forall u \in [0,\sqrt{x}], \quad e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \leq e^{-\frac{u}{x}} \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \forall u \in [0,\sqrt{x}], \quad \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{1+u^2} \leq \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2}du \\
&\Rightarrow \quad \int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{1+u^2}du \leq \int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du \leq \int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{1+u^2}du \\
&\Rightarrow \quad e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}[\arctan(u)]_0^{\sqrt{x}} \leq \int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du \leq \arctan(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

(b) D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}$.

(c) Soit $x > 0$. D'après la question $(4,a)$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du$ est convergente.

$$\begin{aligned}
\forall u \geq \sqrt{x}, \quad 0 \leq \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2} \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2} \leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du \\
&= \quad 0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du \leq [\arctan(u)]_{\sqrt{x}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

(d) En tendant x vers 0, on obtient d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to 0}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du = 0$.

D'autre part, on a: $\forall x>0,\quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du = \int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}$.

Ainsi par passage à la limite $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}$.

(e) D'après les questions $(4.a)$ et $(5.d)$, $\quad f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x}$.

(f) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ est divergente, ce qui implique que $\int_0^{+\infty}f(x)$ est divergente.

<u>Partie III</u>

1. Pour tout $t\geq 0$, la fonction $x\mapsto\varphi_t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi_t^{"}(x) = -2t^2e^{-t}\frac{1-3x^2t^2}{(1+x^2t^2)^3}$$

donc, $|\varphi_t^{"}(x)|\leq 2t^2e^{-t}\frac{1+3x^2t^2}{1+3x^2t^2+3x^4t^4+x^6t^6}\leq 2t^2e^{-t}$.
Soit maintenant x et h non nul. D'après le théorème des accroissements finies, il existe c entre x et $x+h$ tels que $\frac{\varphi_t x+h-\varphi_t(x)}{h} = \varphi_t^{'}(c)$, en utilisant ensuite l'inégalité des accroissements finies, on obtient:

$$\left|\frac{\varphi_t(x+h)-\varphi_t(x)}{h}-\varphi_t^{'}(x)\right| = |\varphi_t^{'}(c)-\varphi_t^{'}(x)|\leq 2t^2e^{-t}|h|.$$

N.B: Cette question est fausse dans l'énoncé original; il suffit de remarquer que pour $x=0$ et $t\neq 0$, $\left|\frac{\varphi_t(h)-\varphi_t(0)}{h} - \varphi\right.$
$\left|\frac{\frac{e^{-t}}{1+h^2t^2}-e^{-t}}{h}+2t^2e^{-t}\right| = t^2e^{-t}\left|\frac{-h}{(1+h^2t^2)}+2\right|$.
Donc pour $h\to 0$, $\quad\left|\frac{\varphi_t(h)-\varphi_t(0)}{h}-\varphi_t^{'}(0)\right|\to 2t^2e^{-t} < t^2e^{-t}$!

2. Remarquons d'abord que $\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$ est convergente, puisque, $t\mapsto t^2e^{-t}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et que $t^2e^{-t} = \circ(\frac{1}{t^2})$.
Alors en intégrant l'inégalité précédente, il vient que :

$$\forall h\neq 0,\quad \int_0^{+\infty}\left|\frac{\varphi_t(x+h)-\varphi_t(x)}{h}-\varphi_t^{'}(x)\right|dt\leq 2|h|\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$$

Donc d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall h\neq 0,\quad \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{\varphi_t(x+h)-\varphi_t(x)}{h}-\varphi_t^{'}(x)\right)dt\right|\leq 2|h|\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$$

C'est à dire, $\forall h\neq 0,\quad\left|\int_0^{+\infty}\frac{\varphi_t(x+h)-\varphi_t(x)}{h}dt-\int_0^{+\infty}\varphi_t^{'}(x)dt\right|\leq 2|h|\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$
ou encore, $\forall h\neq 0,\quad\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\int_0^{+\infty}\varphi_t^{'}(x)dt\right|\leq 2|h|\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$.
En tendant ensuite h vers 0, on obtient que f est dérivable en tout réel x, et qu' on a:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f^{'}(x) = \int_0^{+\infty}\varphi_t^{'}(x)dt = -2x\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{(1+x^2t^2)^2}dt.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, remarquons que, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \omega_n(x)dx - 1\right| = \left|f(\tfrac{1}{n}) - f(0)\right|$.

D'après le théorème des accroissements finies, il existe $c_n \in]0, \frac{1}{n}[$ tel que, $f(\frac{1}{n}) - f(0) = f'(c_n)\frac{1}{n} = -2c_n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{(1+c_n^2 t^2)^2} dt$.

Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$, $\dfrac{1}{1+c_n^2 t^2} \leq 1$ et par une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 2\left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 2$.

En conséquence,

$$\left|\int_0^{+\infty} \omega_n(x)dx - 1\right| = \left|f(\frac{1}{n}) - f(0)\right| = \left|\frac{1}{n} f'(c_n)\right| = 2c_n \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{(1+c_n^2 t^2)^2} dt \frac{1}{n} \leq 2\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{4c_n}{n}.$$

(b) On conclut de l'inégalité précédente que, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \omega_n(x)dx - 1\right| \leq \dfrac{4}{n^2}$.

Donc en tendant n vers $+\infty$, on obtient que, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \omega_n(x)dx = 1$.

Partie IV

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors pour tout $k \in [|1, n|]$, et tout $t \in [k-1, k]$, on a: $f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)$, et ensuite,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{n} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^{n} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Par suite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt = 1 + \int_0^n f(t)dt$; et comme f positive, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, donc $\displaystyle\int_0^n f(t)dt \geq \sum_{k=0}^{n} f(k)$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq 1 + \int_0^n f(t)dt$.

(b) f étant positive et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge, cela implique que, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n f(t)dt = +\infty$.

Donc d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) = +\infty$; ensuite $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f(n)$ est divergente.

(c) f est positive continue et non nulle sur $[0, n]$, alors $\displaystyle\int_0^n f(t)dt > 0$, donc d'après l'encadrement précédent,

$$1 \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f(t)dt} \leq \frac{1}{\displaystyle\int_0^n f(t)dt} + 1.$$

En tendant ainsi n vers $+\infty$, on trouve $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f(t)dt} = 1$, ensuite $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^n f(t)dt$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $t = n^2 x$, pour avoir $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(n^2 x)dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)dt$.

   Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha}{n^2}$ converge $\left(\text{avec } \alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)dt\right)$.

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\alpha\pi^2}{6}$.

   Cependant, $\displaystyle\alpha = \int_0^{+\infty} \varphi_1(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1}}{1+t^2}dt = e^{-1}\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2e}$.

   Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12e}$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle 0 \leq \varphi_n(x) = \frac{e^{-n}}{1+n^2x^2} \leq e^{-n}$.

   Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ est convergente, alors d'après le théorème de comparaison $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \varphi_n(x)$ est convergente.

   (b) Soit x un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on applique la question $(2.b)$ de la partie II, pour x et $t = \dfrac{1}{n}$:

   $$\forall h \in \mathbb{R},\quad |\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)| \leq |h|ne^{-n}.$$

   La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$ et convergente, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq ne^{-n} = \circ(\frac{1}{n^2})$, et que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ est convergente.

   En sommant, ainsi, l'inégalité, on obtient:

   $$\forall h \in \mathbb{R},\quad \sum_{n=o}^{+\infty} |\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |h|ne^{-n} = |h|\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}.$$

   D'après l'inégalité triangulaire, on aura aussi,

   $$\forall h \in \mathbb{R},\quad \left|\sum_{n=o}^{+\infty} \varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |h|ne^{-n} = |h|\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}.$$

   C'est à dire, $\displaystyle\forall h \in \mathbb{R},\quad |\xi(x+h) - \xi(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |h|ne^{-n} = |h|\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}$.

   Par passage à la limite quand h tend vers 0, on obtient, $\displaystyle\lim_{h\to 0} |\xi(x+h) - \xi(x)| = 0$; ce qui termine de prouver que ξ est continue en tout nombre réel x.

   (c) Soit x un nombre réel fixé, et comme précédemment, on applique la question III, 1), à x et $t = n$;

   $$\forall h \in \mathbb{R}^*,\quad \left|\frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h} - \varphi_n^{'}(v)\right| \leq 2|h|n^2e^{-n.}$$

   La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2e^{-n}$ est convergente, puisque $n^2e^{-n} = \circ(\frac{1}{n^2})$.

   Donc en sommant l'inégalité, puis en appliquant l'inégalité, on écrit:

   $$\forall h \in \mathbb{R}^*,\quad \left|\frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{'}(x)\right| \leq |h|\sum_{n=0}^{+\infty} n^2e^{-n}.$$

   Ensuite, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left|\frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{'}(x)\right| = 0$.

   Donc ξ est dérivable en tout nombre réel x et on a $\displaystyle\xi^{'}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{'}(x)$.

Problème 2

Partie I

1. Il suffit de voir que pour tout $t \in [-1,1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|t^k P(X=k)| \leq P(X=k)$, et que $\sum\limits_{n\geq 0} P(x=k)$ est convergente, puisque $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
   Donc pour tout $t \in [-1,1]$, la série $\sum\limits_{k\geq 0} t^k P(X=k)$ est absolument convergente, et ensuite elle est convergente pour tout $t \in [-1,1]$; ce qui justifie que G_X est au moins définie sur l'intervalle $[-1,1]$.

2. G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1, alors elle est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-1,1[$, et on a:
$$\forall t \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad G_X^k(t) = \sum_{i=k}^{+\infty} i(i-1)\cdots(i-k+1)t^{i-k}P(X=k)$$
   Donc en particulier pour $t=0$, $G_X^k(0) = k!P(X=k)$.

3. (a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, vérifie
$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } P(X=1) = p, \; P(X=0) = 1-p.$$
   Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = 1-p+pt$.

   (b) On a $X(\Omega) = \{0,\cdots,n\}$, et pour tout $k \in \{0,\cdots,n\}$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
   Donc G_X est définie sur $\mathbb{R}$ par,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n.$$

   (c) On a, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. Donc G_X est définie sur $]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$ par,
$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pt^k(1-p)^{k-1} = \frac{pt}{1-t(1-p)}.$$

4. Nous avons $G_X^{'}(1) = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$ implique que
$$G_X^{'}(1) = \lim_{t\to 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(t^k-1)P(X=k)}{t-1}$$
   C'est à dire, $G_X^{'}(1) = \lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (1+t+\cdots+t^{k-1})P(X=k)$.
   Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \lim_{t\to 1}\sum_{k=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{k-1})P(X=k) \leq \lim_{t\to 1}\sum_{k=1}^{+\infty}(1+t+\cdots+t^{k-1})P(X=k) = G_X^{'}(1).$$
   Ainsi, la suite des sommes partielles associée à la série de terme positif $kP(X=k)$, est majorée par $G_X^{'}(1)$, donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} kP(X=k)$ est convergente; et ensuite X possède une espérance mathématique, vérifiant

$E(X) \leq G_X^{'}(1)$.
Quant à l'inégalité réciproque, nous avons pour tout $t \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+t+\cdots+t^{k-1})P(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = E(X).$$

Donc, $\lim\limits_{t\to 1^-} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+t+\cdots+t^{k-1})P(X=k) \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = E(X)$.
C'est à dire, $G_X^{'}(1) \leq E(X)$. Finalement, $E(X) = G_X^{'}(1)$.

5. Dans ce cas là, G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > -1$, alors elle est en particulier deux fois dérivables sur $]-R, R[$, et en conséquence elle est deux fois dérivable en 1, et on a:

$$G_X^{"}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(X=k) - \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = E(X^2) - E(X).$$

Notons que d'après l'existence de $G_X^{"}(1)$, la série $\sum\limits_{k\geq 0} k^2P(X=k)$ est convergente, et ensuite X possède une variance.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = G_X^{"}(1) + E(X) - (E(X))^2 = G_X^{"}(1) + G_X^{'}(1) - (G_X^{'}(1))^2.$$

6. Nous avons,
$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pt^k(1-p)^{k-1} = \frac{pt}{1-t(1-p)}. \quad (\frac{1}{1-p} > 1)$$
Donc, $E(X) = G_X^{'}(1) = \dfrac{p^2 + p(1-p)}{p^2} = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = G_X^{"}(1) + G_X^{'}(1) - (G_X^{'}(1))^2 = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

7. (a) Or $\varphi_X(1) = 1$, donc $ae^2 = 1$, et $a = e^{-2}$.

   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{-1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2k}}{k!}$.

   Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} P(X=k) = 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ P(X=k) = \frac{1}{ek!} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$

   (c) $E(X) = \varphi_X^{'}(1) = 2$ et $V(X) = \varphi_X^{"}(1) + \varphi_X^{'}(1) - (\varphi_X^{'}(1))^2 = 6 + 2 - 4 = 4$.

Partie II

1. Soit t dans le domaine de définition de G_X, alors $G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = E(t^{X_1}\cdots t^{X_k})$.
Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, alors il en est de même pour $t^{X_1}, \cdots, t^{X_k}$, donc $G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = E(t^{X_1})\cdots E(t^{X_k})$.
Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_k$ suivent le même loi que X, donc $E(t^{X_1}) = \cdots = E(t^{X_k}) = E(t^X)$ et ensuite $G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = (G_X(t))^k$.

2. (a) $E(Y) = \sum\limits_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y)$. Le système $\{[N=k] \ / \ k=1,\cdots,n\}$ est complet. alors d'après la formule des probabilités totales, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y=y) = \sum_{k=1}^{n} P(Y=y, N=k) = \sum_{k=1}^{n} P(Y=y|N=k)P(N=k).$$

   Ainsi,

$$E(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{k=1}^{n} yP(Y=y|N=k)P(N=k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y|N=k)P(N=k)$$

   Donc $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(Y|N=k)P(N=k)$.

(b) Résulte immédiatement de $(1.)$.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$, $G_S(t) = E(t^S) = \sum_{k=1}^{n} P(N=k)E(t^S|N=k) = \sum_{k=1}^{n} G_X^k P(N=k)$

(d) Résulte immédiatement de la question précédente.

3. $E(S) = G_S^{'}(1) = G_N^{'}(G_X(1)).G_X^{'}(1) = G_N^{'}(1)G_X^{'}(1) = E(N)E(X)$.

<u>Partie III</u>

1. (a) $N(\Omega) = \{0,1\}$; $P(N=1) = \frac{1}{2}$ et $P(N=2) = \frac{1}{2}$.

(b) • **Cas où $N=1$:** Dans ce cas $S(\Omega) = \{1,2,3,4\}$; avec

$$P(S=1|N=1) = P(S=2|N=1) = P(S=3|N=1) = P(S=4|N=1) = \frac{1}{4}.$$

• **Cas où $N=2$:** $S(\Omega) = \{2,3,,4,5,6,7,8\}$.

$$P(S=2|N=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16},\quad P(S=3|N=2) = 2\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8},\quad P(S=4|N=2) = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(S=5|N=2) = 2\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{16}, P(S=6|N=2) = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(S=7|N=2) = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{16},\quad P(S=8|N=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

(c) $P(S=1) = P(S=1|N=1)P(N=1) + P(S=1|N=2)P(N=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+0 = \frac{1}{8}$.

$P(S=2) = P(S=2|N=1)P(N=1) + P(S=2|N=2)P(N=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{32}$

$P(S=3) = P(S=3|N=1)P(N=1) + P(S=3|N=2)P(N=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{6}{32}$

$P(S=4) = P(S=4|N=1)P(N=1) + P(S=4|N=2)P(N=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{32}$

$P(S=5) = P(S=5|N=1)P(N=1) + P(S=5|N=2)P(N=2) = 0+\frac{4}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{32}$

$P(S=6) = P(S=6|N=1)P(N=1) + P(S=6|N=2)P(N=2) = 0+\frac{3}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{32}$

$P(S=7) = P(S=7|N=1)P(N=1) + P(S=7|N=2)P(N=2) = 0+\frac{2}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{32}$

$P(S=8) = P(S=8|N=1)P(N=1) + P(S=8|N=2)P(N=2) = 0+\frac{1}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.

$$E(S) = \sum_{k=1}^{8} kP(S=k) = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}\quad,\quad V(S) = E(S^2)-(E(S))^2 = \frac{560}{32}-\frac{225}{16} = \frac{55}{16}.$$

2. (a) Il s'agit de la variable aléatoire égale au nombre obtenu à l'issu de chaque lancer du dé.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$G_N(t) = tP(N=1)+t^2P(N=2) = \frac{1}{2}(t+t^2)$, $G_X(t) = tP(X=1)+t^2P(X=2)+t^3P(X=3)+t^4P(X=4) = \frac{1}{4}(t+t^2+t^3+$

On conclut d'après la partie II, que:

$$\begin{aligned} G_S(t) = G_N\circ G_X(t) &= \frac{1}{8}\left(t+t^2+t^3+t^4+\frac{1}{4}(t+t^2+t^3+t^4)^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(t+\frac{5}{4}t^2+\frac{6}{4}t^3+\frac{7}{4}t^4+\frac{4}{4}t^5+\frac{3}{4}t^6+\frac{2}{4}t^7+\frac{1}{4}t^8\right)\end{aligned}$$

Il suffit ainsi d'exprimer les coefficients du polynôme G_S de degré 8, pour établir la loi de S, puis en appliquant les formules $E(S) = G_S^{'}(1)$ et $V(S) = G_S^{"}(1)+G_S^{'}(1)-(G_S^{'}(1))^2$, on retrouve les résultats obtenus dans la question $(1.c)$ de cette partie.