L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Problème 1

On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction φ_t définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}$. Dans ce problème on considère la fonction réelle f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_t(x)dt$.

Partie I
Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0, \pi]$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}$.
3. Soit ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une integration par parties que $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = 0$.
4. Soit g la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin(\frac{(2n+1)}{2}x)dx$.

   b) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II
Domaine de définition, limites et continuité de f

1. a) Montrer que le domaine de définition D_f de f est $\mathbb{R}$.

   b) Étudier la parité de f.
2. a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, φ_t est une fonction dérivable (par rapport à x) sur $\mathbb{R}^+$ et que, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|\varphi_t'(x)| \leq te^{-t}$.

b) En déduire que, pour tous réels t et x positifs et pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x + h \geq 0$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leq |h|te^{-t}$$

c) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

4. a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{-u}{x}}}{1+u^2}du$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x,
$$e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\sqrt{x}) \leq \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{\frac{-u}{x}}}{1+u^2}du \leq \arctan(\sqrt{x})$$

   b) En déduire la limite de $\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{\frac{-u}{x}}}{1+u^2}du$ en $+\infty$.

   c) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-u}{x}}}{1+u^2}du \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})$.

   d) En déduire la limite de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{-u}{x}}}{1+u^2}du$ en $+\infty$.

   e) Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

   f) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.

Partie III
Dérivabilité de f

1. Montrer que, pour tous réels t et x positifs et pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x + h \geq 0$,
$$\left|\frac{\varphi_t(x+h) - \varphi_t(x)}{h} - \varphi_t'(x)\right| \leq |h|t^2e^{-t}$$

2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout réel positif x,
$$f'(x) = -2x\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{(1+t^2x^2)^2}dt$$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $w_n(x) = \frac{n^2e^{-x}}{n^2+x^2}$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]0, \frac{1}{n}[$ tel que $\left|\int_0^{+\infty} w_n(x)dx - 1\right| \leq \frac{4c_n}{n}$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} w_n(x)dx$.

Partie IV
Etude de quelques séries en relation avec la fonction φ_t

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^n f(t)dt \leq \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leq 1 + \int_0^n f(t)dt$.

   b) En déduire que $\sum\limits_{n\geq0} f(n)$ est une série divergente.

   c) En déduire que S_n est équivalente à $\int_0^n f(t)dt$.

2. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \int_0^{+\infty} \varphi_1(n^2x)dx$.
   Montrer que $\sum\limits_{n\geq1} v_n$ est convergente et calculer sa valeur.

3. a) Montrer que pour tout réel x, la série $\sum\limits_{n\geq0} \varphi_n(x)$ est convergente.

   On considère par la suite, la fonction ξ définie sur $\mathbb{R}$ par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\xi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

b) Montrer, en utilisant la question de la Partie II, 2. b), que la fonction ξ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer, en utilisant la question de la Partie III, 1., que la fonction ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\xi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n'(x)$.

Problème 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I
Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle [-1,1].
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. Donner l'expression de G_X, en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
   a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.
   b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$.
   c) X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $G(p)$, où $p \in]0, 1[$.
4. Montrer que si G_X est dérivable en 1 alors la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$, telle que $G_X'(1) = E(X)$.
5. Montrer que si le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$ est strictement supérieur à 1, alors la variance de la variable aléatoire X existe et on a $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $G(p)$ de paramètre p, où $p \in]0, 1[$.
7. Soit X une variable aléatoire réelle qui a pour fonction génératrice φ_X telle que $\varphi_X(t) = ae^{(1+t^2)}$, a un réel.
   a) Déterminer la valeur de a.
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Partie II
La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1, m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $(N = h)$ est réalisé, $h \in [\![1, n]\!]$, alors $S = \sum_{i=1}^{h} X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $G_{X_1+\ldots+X_k} = G_X^k$.
2. a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in [\![1, n]\!]$,
   $E(Y|[N = k]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP\left((Y = y)|[N = k]\right)$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P\left((Y = y)|[N = k]\right)$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout réel t, $E(t^S | [N = k]) = G_X^k(t)$.

c) En déduire que pour tout réel t, $G_S(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k) G_X^k(t)$.

d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.

3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III
Application

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

1. a) Déterminer la loi de N.

   b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.

   c) En déduire la loi de S, puis son espérance et sa variance.

2. a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

   b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S.

   c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S, la loi, l'espérance et la variance de S.

FIN DE L'ÉPREUVE