ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⵓⵎⵔ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵜⵓⵙⵙⵏⴰ ⵜⴰⵥⵓⵕⴰⵏⵜ
ⴷ ⵓⵙⵙⵓⵎⵔ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⵓⵙⵙⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ENSIAS

جامعة محمد الخامس بالرباط
Université Mohammed V de Rabat

CNC 2020

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Épreuve de **Mathématiques**

Filière : **TSI**

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte **3 pages** au format A4, en plus de la page de garde
L'usage de tout document et de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composée de deux exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité. Le premier exercice est noté sur **4 points sur 20** *; le reste de l'épreuve est noté sur* **16 points sur 20.**

Exercice 1
Étude d'une équation intégrale
(Noté sur 4 points sur 20)

Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** ; on suppose qu'il existe $a \in]0,1]$ tel que :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^{ax} g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

L'objet de l'exercice est de montrer que la fonction g est nulle.

1. Montrer que la fonction g est dérivable sur le segment $[0,1]$ et exprimer sa dérivée.

2. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$.

3. On suppose ici que $a = 1$.

3.1. Montrer que g est solution sur $[0,1]$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.

3.2. Résoudre l'équation différentielle linéaire ainsi trouvée et montrer que la fonction g est nulle.

Dans la suite, on suppose que $a \in]0,1[$.

4. Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1], \quad g^{(k)}(x) = a^{\frac{k(k+1)}{2}} g(a^k x).$$

5. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = 0$.

6. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1], \quad g(x) = a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g(a^{n+1}t)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra user de la formule de Taylor avec reste intégrale.

7. On pose $M = \sup\limits_{0\leq s\leq 1} |g(s)|$. Déduire de ce qui précède que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1], \quad |g(x)| \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

8. En déduire que g est la fonction nulle.

Exercice 2
Étude d'une série entière

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^{2n+1}$, où $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n+1}$. $f = \sum$

Dans la suite de cet exercice, on note f la fonction de la variable réelle somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

2. Montrer que la fonction f vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

3. Résoudre l'équation différentielle linéaire trouvée ci-dessus puis exprimer f sous forme d'une intégrale faisant intervenir des fonctions usuelles.

Problème
À propos de matrices de permutations

Notations

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se note I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et $\mathrm{rg}\,(A)$ son rang ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(A)$ désigne la trace de A, χ_A son polynôme caractéristique et A^{-1} représente l'inverse de A si elle est inversible ; on rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det(x\, I_n - A).$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, inversibles et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ sur lui même ; les éléments de $\mathfrak{S}_n$ s'appellent aussi des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \; f_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)},$$

où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

De même, on note P_σ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j \leqslant n},$$

dite *matrice de la permutation* σ, où pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kroneker égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon.

1ère Partie
Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

On note $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ la permutation définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, cela veut dire que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$.

1.1. Inversibilité et inverse de P_σ

1.1.1. Expliciter la matrice $P_\sigma \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis exprimer la matrice de l'endomorphisme f_σ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ en fonction de P_σ.

1.1.2. Vérifier que l'endomorphisme f_σ est bijectif et en déduire que la matrice P_σ est inversible.

1.1.3. Calculer ${}^tP_\sigma\, P_\sigma$ et en déduire l'inverse de P_σ.

1.2. Diagonalisation de P_σ

1.2.1. Vérifier que $P_\sigma^3 = I_3$.

1.2.2. Montrer alors que la matrice P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1.2.3. Calculer les valeurs propres de la matrice P_σ ainsi qu'une base de vecteurs propres associées.

1.2.4. On note Q la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que Q est inversible puis justifier que la matrice $Q^{-1} P_\sigma Q$ est diagonale en précisant ses éléments diagonaux.

2ème Partie
Quelques généralités sur les matrices de permutations

Dans cette partie, σ désigne un élément quelconque de $\mathfrak{S}_n$.

2.1. Inversibilité d'une matrice de permutation

2.1.1. Exprimer la matrice de l'endomorphisme f_σ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de la matrice P_σ.

2.1.2. Justifier que l'endomorphisme f_σ est bijectif puis en déduire que la matrice P_σ est inversible.

2.2. Transposée d'une matrice de permutation

2.2.1. Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. Calculer, selon i et j, la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)} \delta_{k,\sigma(j)}$. On pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$.

2.2.2. En déduire que ${}^tP_\sigma P_\sigma = I_n$ puis exprimer l'inverse de la matrice P_σ en fonction de sa transposée. Que peut-on alors dire de la matrice P_σ ?

2.3. Structure de l'ensemble des matrices de permutations

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma \; ; \; \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

2.3.1. Soient σ et σ' deux éléments de $\mathfrak{S}_n$. Exprimer $f_\sigma \circ f_{\sigma'}$ en fonction de $f_{\sigma \circ \sigma'}$ puis en déduire que

$$P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.$$

2.3.2. On rappelle que σ^{-1} désigne l'inverse de la permutation σ. Justifier que l'inverse de la matrice P_σ est la matrice $P_{\sigma^{-1}}$: $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

3ème Partie
Diagonalisation d'une matrice de permutation d'ordre n

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1. Vérifier que A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ définie par :

$$\sigma(1) = n, \; \sigma(2) = 1, \; \sigma(3) = 2, \; \ldots, \; \sigma(n) = n - 1.$$

3.2. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

3.3. Que peut-on alors dire de la matrice A ?

3.4. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Vérifier que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$AV_k = w^k V_k.$$

3.5. En déduire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de la matrice A.

FIN DU SUJET