Concours National Commun 2007

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II, filière BCPST

EXERCICE

1. f, qui est bien définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, y est dérivable puisque elle est la composée des fonctions $x \longmapsto 1-x$ et $x \longmapsto \ln x$ qui sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$; en plus, pour tout $x < 1$, $\quad f'(x) = \dfrac{-1}{1-x}$. En particulier $f'(0) = -1$.

2. D'après ce qui précède $\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0) = -1$; on en déduit que la fonction en question est prolongeable par continuité en 0.

3. (a) Le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto ln(1-x)$ permet d'écrire,
$$\forall\, x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$
on en déduit que
$$\forall\, x \in]-1,1[,\ \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n},$$
qui est le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ dont on peut vérifier, par la règle de D'Alembert, que le rayon de convergence vaut 1.

   (b) Soit $x \in]-1,1[$; en intégrant terme à terme le développement en série entière de la fonction $t \longmapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$, sur le segment d'extrémités 0 et x, on obtient
$$F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

4. (a) La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ découle de la règle de D'Alembert pour les séries numériques.

   (b) Pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{x^k}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$; on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1[$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$; la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, montre qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \varepsilon/2$. On en déduit, grâce à la question précédente, que, pour tout $x \in [0,1[$,
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} + \varepsilon/2.$$
Par ailleurs, puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} \longrightarrow 0$ lorsque x tend vers 1, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que, pour tout $x \in]1-\eta, 1[$, on ait $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} \leqslant \varepsilon/2$. Il en résulte que pour tout $x \in]1-\eta, 1[$,
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1-x^k}{k^2} + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ceci prouve que la fonction F admet $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ comme limite en 1 ; F est donc prolongeable par continuité à gauche en 1 en posant $F(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

5. (a) Les théorèmes généraux sur la dérivation montrent que la fonction g est bien dérivable sur $]0,1[$ et on a
$$\forall\, x \in]0,1[, \quad g'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x},$$
ce qui n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction $x \longmapsto -\ln x \ln(1-x)$.

   (b) On déduit de la question précédente que la fonction $x \longmapsto g(x) + \ln x \ln(1-x)$, ayant une dérivée nulle sur l'intervalle $]0,1[$, y est constante. Comme $\ln(1-x)\ln x \underset{x\to 0}{\sim} x \ln x$, on voit que la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto g(x) + \ln x \ln(1-x)$ vaut $F(1)$. Ainsi, la fonction $x \longmapsto g(x) + \ln x \ln(1-x)$, qui est constante sur l'intervalle $]0,1[$, a pour valeur $F(1)$, d'où le résultat demandé.

   (c) Par définition, $F(1/2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ et d'après la question précédente,
$$2F(1/2) = F(1) - \ln(1/2)\ln(1/2) = -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6},$$
d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = -\frac{(\ln 2)^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}.$$

6. (a) On sait que, pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$; en séparant les indices paires et impaires on obtient
$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad F(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2};$$
de même
$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad F(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2}.$$
D'où
$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad F(x) + F(-x) = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2} F(x^2).$$

   (b) La règle de D'Alembert montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente ; en faisant tendre x à gauche vers 1 dans la formule de la question précédente on obtient, compte tenu de la continuité de F en -1 ,
$$\int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt = F(-1) = -\frac{1}{2}F(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$
Pour conclure, il reste à justifier que l'on peut intégrer terme à terme, sur le segment $[-1,0]$, le développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$. Pour cela, il suffit de montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, t \in [-1,0], \qquad \left| \frac{\ln(1-t)}{t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Or ceci peut être obtenu en vérifiant que, pour tout $t \in [-1,0]$, les deux suites $(S_{2n}(t))_n$ et $(S_{2n+1}(t))_n$ sont adjacentes où $(S_n(t))_n$ est la suite définie par
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \; S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k}.$$

On obtient finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

PROBLÈME

1ère Partie

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. La première colonne $C_1(A)$ de la matrice en question est non nulle et elle engendre donc un sous-espace vectoriel qui est de dimension 1, c'est $\mathbb{R}.C_1(A)$; la deuxième $C_2(A)$ est le double de la première donc appartient à $\mathbb{R}.C_1(A)$ et ainsi le sous-espace vectoriel engendré par les deux colonnes de A est de dimension 1 ; la matrice A est donc de rang 1.

2. On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A, c'est l'application $X \longmapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui même. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, si E_k désigne l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la k-ième valant 1, alors $f_A(E_k) = AE_k = C_k(A)$, en plus $(E_1, \ldots, E_n)$ étant une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a
$$\operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{Vect}\big(f_A(E_1), \ldots, f_A(E_n)\big) = \operatorname{Vect}\big(C_1(A), \ldots, C_n(A)\big).$$
On en déduit alors que $\dim \operatorname{Im}(f_A) = \dim \operatorname{Vect}\big(C_1(A), \ldots, C_n(A)\big) = \operatorname{rg}(A)$.

3. (a) On a $A = U{}^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} . (v_1 \ldots v_n)$; en notant $A = (a_{i,j})$ et en effectuant le produit matriciel $U{}^tV$, on voit que $a_{k,\ell} = u_k v_\ell$ pour tout $(k, \ell) \in \{1, \ldots, n\}^2$.
   (b) Avec les notations de la question précédente, on a : $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^tVU$.
   (c) D'après la question 3.(a), la j-ième colonne $C_j(A)$ de A est $v_j U$.
   (d) On a $V \neq 0$, donc il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$; ainsi $C_{j_0}(A) = v_{j_0}U \neq 0$ puisque $U \neq 0$; on en déduit que $\operatorname{rg}(A) \geqslant 1$. D'autre part, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $C_j(A) = v_j U = \frac{v_j}{v_{j_0}} C_{j_0}(A)$ cela montre que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de A est $\mathbb{R}.C_{j_0}(A) = \{\lambda.C_{j_0}(A) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et donc que $\operatorname{rg}(A) = 1$.

4. (a) La matrice A est de rang 1 et par suite l'une de ses colonnes au moins est non nulle, d'où l'existence d'un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) On a $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), \ldots, C_n(A)) = 1$, donc $\operatorname{Vect}\big(C_1(A), \ldots, C_n(A)\big) = \mathbb{R}.C_{i_0}(A)$ et les colonnes de la matrice A sont donc toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; ainsi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$, avec en particulier $\lambda_{i_0} = 1$.
   (c) D'après le calcul précédent, les vecteurs colonnes de A sont $\big(\lambda_1 C_{i_0}(A), \ldots, \lambda_n C_{i_0}(A)\big)$; le calcul effectué à la question 3.(a) montre alors que $A = C_{i_0}(A).(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, c'est à dire que $A = X{}^tY$ avec $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.
   (d) Si $A = X_0{}^tY_0 = X_1{}^tY_1$ et $\operatorname{rg}(A) = 1$, alors les vecteurs X_0, X_1, Y_0 et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0 = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$, $Y_1 = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$; or $C_{i_0}(A) = y_{i_0}X_0 = z_{i_0}X_1$ donc $X_1 = \lambda X_0$ avec $\lambda = \frac{y_{i_0}}{z_{i_0}} \neq 0$. Par ailleurs, pour tout élément j de $\{1, \ldots, n\}$, $C_j(A) = y_j X_0 = z_j X_1 = \lambda z_j X_0$ donc $z_j = \frac{1}{\lambda} y_j$ et $Y_1 = \frac{1}{\lambda} Y_0$. Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien $(\lambda X_0){}^t(\frac{1}{\lambda} Y_0) = X_0{}^tY_0 = A$. Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $(\lambda X_0, \frac{1}{\lambda} Y_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

5. Une vérification immédiate permet de voir que si $U_0 = V_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $A = U_0{}^tV_0$ et, d'après ce qui précède, les autres couples cherchés sont de la forme $(\lambda U_0, \frac{1}{\lambda} V_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$2^{\text{ème}}$ Partie

Soit $A = U^tV$ une matrice de rang 1 , $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV).U$; on remarque que α et ${}^tVV$ sont des réels. On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

1. Par associativité du produit matriciel, on peut écrire $A^2 = (U^tV)(U^tV) = U({}^tVU){}^tV = \alpha A$.

2. On va montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \alpha^{k-1}A$. On sait déjà que $A = 1A = \alpha^0 A$ et $A^2 = \alpha A$; supposons que la propriété est est vraie jusqu'à l'ordre k et montrons là à l'ordre $k+1$; l'hypothèse de récurrence donne $A^k = \alpha^{k-1}A$ et en multipliant les deux membres de cette égalité par A on obtient $A^{k+1} = AA^k = A(\alpha^{k-1}A) = \alpha^{k-1}A^2 = \alpha^{k-1}\alpha A = \alpha^k A$.

3. Par définition, la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$, cela se traduit par $\alpha^{k-1}A = 0$; or puisque A est non nulle alors $k \geqslant 2$ et $\alpha = 0$. Réciproquement, si $\alpha = 0$ alors $A^2 = \alpha A = 0$ et A est nilpotente.

4. Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a
$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}A^2 = \frac{1}{\alpha^2}\alpha A = \frac{1}{\alpha}A,$$
donc la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ est celle d'un projecteur.

5. (a) La matrice A est de rang 1 et comme $n \geqslant 2$ alors A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A ; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0, qui n'est rien d'autre que le noyau de f_A noté $\operatorname{Ker} f_A$, est par définition égal à
$$\operatorname{Ker} f_A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ AY = 0\} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ U^tVY = 0\}.$$
Par ailleurs, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tVY$ est un réel et en plus, comme $U \neq 0$, on a l'équivalence
$$U^tVY = ({}^tVY)U = 0 \Longleftrightarrow {}^tVY = 0;$$
on en déduit que $\operatorname{Ker} f_A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ {}^tVY = 0\}$ et d'après le théorème du rang on obtient $\dim \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rg}(A) = n-1$. En conclusion, 0 est une valeur propre de la matrice A et le sous-espace propre associé, qui n'est rien d'autre que le noyau de f_A, est de dimension $n-1$.

   (b) On a $AU = U^tVU = ({}^tVU)U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A. Par ailleurs, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = \alpha X$ alors $\alpha X = (U^tV)X = ({}^tVX)U$ et par suite $X = \frac{{}^tVX}{\alpha}.U \in \mathbb{R}.U$; ceci permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est $\mathbb{R}.U$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, engendré par U ; il est donc de dimension 1.

   (c) •Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et il existe donc un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$; on en déduit que, si $\beta \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A associé au vecteur propre X_0, l'égalité $AX_0 = \beta.X_0$ donne $0 = A^kX_0 = \beta^kX_0$ donc $\beta^k = 0$ puisque $x_0 \neq 0$ et par suite $\beta = 0$; donc 0 est l'unique valeur propre de A .

   •Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet déjà deux valeurs propres qui sont 0 et α et puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il n'y en a pas d'autres.

6. On vient de voir que si $\alpha \neq 0$ alors la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α, et la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on en déduit que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En plus, la matrice D de l'endomorphisme f_A dans une base de vecteurs propres de A de la forme $(U_1, \ldots, U_{n-1}, U)$ est diagonale égale à $D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$. Comme les matrice A et D représentent le même endomorphisme, elle sont semblables.

7. (a) Puisque $\alpha = 0$, la matrice A possède la seule valeur propre 0 et dont le sous-espace propre associé est de dimension $n-1 < n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; ceci prouve que A n'est pas diagonalisable.

(b) On a vu que $f(U) = AU = \alpha.U = 0$ donc $U \in \operatorname{Ker} f$; comme $W = ({}^tVV).U$ est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$, il existe, d'après le théorème de la base incomplète, une base de ce sous-espace vectoriel de la forme voulue.

(c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \beta$ et γ des réels tels que : (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k E_k + \beta W + \gamma V = 0$; en appliquant f aux deux membre de (1), et compte tenu du fait que $f(V) = AV = W \neq 0$, on obtient $\gamma = 0$ et (1) devient $\beta W + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k E_k = 0$. La famille $(E_1, \ldots, E_{n-1}, W)$ étant libre on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \beta = 0$. La famille $(E_1, \ldots, E_{n-1}, W, V)$ est donc libre et comme elle a n éléments, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Puisque $f(V) = AV = W$ et $f(W) = f(E_1) = \cdots = f(E_{n-1}) = 0$, la matrice de f relativement à la base $(E_1, \ldots, E_{n-1}, W, V)$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, A est semblable à cette matrice.

(d) Cela provient du fait que ces deux matrices sont semblables, d'après ce qui précède, à une même matrice.
