ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

1. Pour tout réel $x \in]-\infty, 1[$, on pose $f(x) = \ln(1-x)$. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer sa dérivée. Que vaut $f'(0)$?

2. Justifier alors que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$, définie sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, est prolongeable par continuité en 0.

   Dans la suite, on pose
$$F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt, \quad x \in [-1, 1[.$$

3. (a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction
$$x \longmapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$$
   en précisant son rayon de convergence.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\quad F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

4. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Dans la suite, on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

   (c) Démontrer que la fonction F est prolongeable par continuité en 1. On notera encore F ce prolongement par continuité. Préciser $F(1)$.

5. (a) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par $x \longmapsto F(x) + F(1-x)$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln x \ln(1-x)$

   (c) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$.

6. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) + F(-x) = \frac{1}{2}F(x^2)$.

   (b) Justifier la convergence et déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

1ère Partie

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

3. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V. On pose $A = U\,{}^tV$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A ?
   (c) Exprimer les colonnes $C_1(A), \dots, C_n(A)$, de A, à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

4. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
   (c) En déduire que $A = X\,{}^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
   (d) On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.

5. Expliciter les éléments U et V de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U\,{}^tV$ où A désigne la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2ème Partie

Soit $A = U\,{}^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; calculer A^k en fonction du réel α et de A.

3. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

4. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'une projection c'est à dire $(\lambda A)^2 = \lambda A$.

5. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?
   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.
   (c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

6. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $0, \ldots, 0, \alpha$ pris dans cet ordre.

7. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
   (a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que $U \in \operatorname{Ker} f$ et justifier l'existence d'une base de $\operatorname{Ker} f$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W)$.
   (c) Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
   (d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE