CNC - Maths II

Proposition de corrigé

Taoufiki said

Problème

Partie I : Etude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $\forall (i,j)$, $|(AB)_{i,j}| = |\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}||B_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
   D'où $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
2. (a) En utilisant l'inégalité triangulaire puis l'homogénéité de N, on obtient :
   $$N(X) = N(\sum_{1\leq i,j\leq n} x_{i,j}E_i^j) \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |x_{i,j}|N(E_i^j)$$
   Puisque $\|X\|_\infty$ majore tous les $|x_{i,j}|$, alors $N(X) \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} N(E_i^j)\right) \|X\|_\infty$.

   (b) i. Posons $k = \sum_{1\leq i,j\leq n} N(E_i^j) > 0$ (car les $E_i^j \neq 0$). Par l'inégalité triangulaire inverse, on a :
   $$|N(X) - N(Y)| \leq N(X-Y) \leq k\|X-Y\|_\infty$$
   La fonction $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue car $k-$Lipchitzienne.

   ii. La norme $\|\|_\infty$ est 1$-$Lipchitzienne (par l'inégaliotsé triangulaire inverse) donc continue puis S_∞ est fermé comme image réciproque d'une fermé $\{0\}$ par une fonction continue. Comme il est clairement borné et on est en dimension finie, alors S_∞ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   On sait qu'une application continue sur un compacte à valeurs réelles est bornée et que ses bornes sont atteintes, donc il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que $N(X_0) = \min_{X\in S_\infty} N(X)$, d'où la propriété cherchée.

iii. On pose : $\alpha = N(X_0)$. $\alpha > 0$ car la norme d'un vecteur non nul.
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $X = 0$ l'inégalité est triviale, sinon, le fait que $\frac{X}{\|X\|_\infty} \in S_\infty$ et la question précédente permettent d'écrire $\alpha \leq N(\frac{X}{\|X\|_\infty})$ puis avoir l'inégalité cherchée.

(c) Pour une norme arbitraire N, on a trouvé que $\alpha\|.\|_\infty \leq N \leq k\|.\|_\infty$.
Deux normes quelconques sont équivalentes à la normes $\|.\|_\infty$, puis elles sont équivalentes par transitivité.

3. (a) N et $\|X\|_\infty$ sont équivalentes, donc il existe $\beta > 0$ tel que : $N \leq \beta\|.\|_\infty$.
Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a : $N(AB) \leq \beta\|AB\|_\infty \leq n\beta\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

(b) Pour la même raison il existe $\alpha > 0$ tel que : $\alpha\|.\|_\infty \leq N$.
Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a : $N(AB) \leq n\beta\|A\|_\infty\|B\|_\infty \leq \frac{n\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$.

(c) Le réel $\frac{n\beta}{\alpha^2}$ conient.

4. (a) i. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La fonction $X \mapsto N(AX)$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ car composition de la norme N qui est 1−Lipschitzienne et $X \mapsto AX$ qui est de composantes polynomiales en coefficients de X. On vérifie comme dans $Q.I.2.b.i.$ que $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid N(X) = 1\}$ est un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc $X \mapsto N(AX)$ est bornée et atteint sa borne supérieure, que l'on note $\|A\|$, de sorte qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $N(X_0) = 1$ et $\|A\| = N(AX_0)$.
Maintenant, si on prend $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul , on a : $N(\frac{X}{N(X)}) = 1$ donc $\frac{N(AX)}{N(X)} = N\left(A\frac{X}{N(X)}\right) \leq \|A\| = N\left(\frac{X_0}{N(X_0)}\right)$, d'où le résultat.

ii. Par définition de $\|A\|$ que l'on a expliqué dans la question précédente, on a :

$$\|A\| = \sup\{N(AX) \mid N(X) = 1\}$$

iii. •

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\implies \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ , \ N(AX) = 0 \\ &\implies \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ , \ AX = 0 \\ &\implies A = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\|\lambda A\| &= \sup\{N(\lambda AX) \mid N(X)=1\}\\ &= \sup\{|\lambda| N(AX) \in \mid N(X)=1\}\\ &= |\lambda|\|A\|\end{aligned}$$

- $\exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $N(X_0)=1$ et $\|A+B\| = N((A+B)X_0)$.
  On a : $\|A+B\| = N((A+B)X_0) \leq N(AX_0)+N(BX_0) \leq \|A\|+\|B\|$

(b) i. Par définition de $\|A\|$, on a : $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \|A\|$ pour chaque X non nul, donc $N(AX) \leq \|A\| N(X)$ pour tout X (même s'il est nul).

ii. Soit $X \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}N(ABX) &\leq \|A\| N(BX)\\ &\leq \|A\|\|B\| N(X)\end{aligned}$$

donc $\frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \|A\|\|B\|$, ceci pour tout $X \neq 0$. Le passage à la borne supérieure, entraîne que : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Partie II : Suites de matrices

1. Puisque les normes sont toutes équivalentes, on choisit la norme $\|.\|_\infty$.
   - Supposons que $\lim A_m = A$. On a : $\forall i,j$, $0 \leq |a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \leq \|A_m - A\|_\infty$, par encadrement, $\forall i,j$, $\lim a_{i,j}^{(m)} = a_{i,j}$.
   - Supposons que $\forall i,j$, $\lim a_{i,j}^{(m)} = a_{i,j}$. On a : $\forall i,j$, $0 \leq \|A_m - A\|_\infty \leq \sum_{i,j} |a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}|$, par encadrement, $\lim A_m = A$.

2. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, les réels $C_m = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{m^2}} > 0$ et $\theta_m = \arcsin\left(\frac{\alpha}{mC_m}\right)$ sont convenables.

   (b) On note $R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. On sait que $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$, donc $A_m^m = C_m^m R(m\theta_m)$.
   $C_m^m = \exp(\frac{m}{2}\ln(1+\frac{\alpha^2}{m^2})) \to 1$ et $m\theta_m \sim \frac{\alpha}{C_m} \to \alpha$.
   Par conséquent, $\lim_{m\to+\infty} A_m^m = R_\alpha$

Partie III : Séries de matrices

1. • Supposons que $\sum_{m\geq 0} A_m$ converge et posons $S_N = \sum_{m=0}^{N} A_m$ et $S = \sum_{m=0}^{\infty} A_m$.

On a : $\lim_{N\to+\infty} S_N = S$, donc, par $Q.II.1.$, on a $\forall i,j$, $\sum_{m=0}^{N} a_{i,j}^{(m)}$ converge.

• Réciproquement, si $\forall i,j$, $\sum_{m\geq 0} a_{i,j}^{(m)}$ converge, alors $\forall i,j$, $(\sum_{m=0}^{N} a_{i,j}^{(m)})_N$ converge, donc $(S_N)_N$ converge puis la série $\sum_{m\geq 0} A_m$ est convergente.

2. Supposons la convergence absolue de la série $\sum_{m\geq 0} A_m$ relativement à la norme $\|.\|_\infty$.
On a donc $\sum_{m\geq 0} \|A_m\|_\infty$ est convergente, puisque $\forall i,j$, $|a_{i,j}^{(m)}| \leq \|A\|_\infty$ alors les séries $\sum_{m\geq 0} a_{i,j}^{(m)}$ sont toutes absolument convergentes puis elles sont toutes convergentes, d'où la convergence de $\sum_{m\geq 0} A_m$ (par $Q.III.1.$)

3. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(I_n - A)(\sum_{m=0}^{N} A_m) = \sum_{m=0}^{N} A^m - \sum_{m=0}^{N} A^{m+1} = I_n - A^{N+1}$ $(*)$.
La convergence de la série de matrice entraîne la convergence de toutes les séries de coefficients, ce qui implique que $\forall i,j$, $\lim_{m\to+\infty} a_{i,j}^{(m)} = 0$ (propriété de la divergence grossière), d'où $\lim_{m\to+\infty} A^m = 0$. Puisque l'application $X \to (I_n - A)X$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors le passage à la limite dans $(*)$ nous donne : $(I_n - A)(\sum_{m=0}^{\infty} A_m) = I_n$. D'où l'inversibilité de la somme avec $(\sum_{m=0}^{\infty} A_m)^{-1} = I_n - A$.

4. (a) On a : $\chi_B(X) = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = (X + \frac{1}{3})(X - \frac{1}{2})$, il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $B = PDP^{-1}$ avec $D = diag(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
La série $\sum_{m\geq 0} D^m$ converge car les séries $\sum_{m\geq 0} (\frac{-1}{3})^m$, $\sum_{m\geq 0} (\frac{1}{2})^m$ le sont.
Comme $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=0}^{N} B^m = P(\sum_{m=0}^{N} D^m)P^{-1}$ et $X \to PXP^{-1}$ est continue (composantes polynomiales) alors $\sum_{m\geq 0} B^m$ est convergente.
La somme est $P \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $\left(\sum_{m=0}^{\infty} B^m\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{-5}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix} = I_2 - B$.

Partie IV : Exponentielle d'une matrice

1. Soit N une norme sous-multiplicative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $N(\frac{1}{m!}A^m) \leq \frac{1}{m!}N(A)^m$, comme la série $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!}N(A)^m$ est convergente (de somme $\exp(N(A))$), alors la série $\sum_{m\geq 0} N(\frac{1}{m!}A^m)$ est convergente d'où la convergence de la série $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!}A^m$ (par $Q.III.2.$).

2. Par définition :

$$\begin{aligned}
\exp(S) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}S^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}S^{2m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}I_n + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}S \\
&= \cosh(1)I_n + \sinh(1)S
\end{aligned}$$

3. (a) On pose $S_N = \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}A^m$, $T_N = \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}B^m$ et $R_N = \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}(A+B)^m$. On a :

$$\begin{aligned}
\|S_N T_N - R_N\| &= \| \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}A^m\right)\left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}B^m\right) - \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}(A+B)^m\right) \| \\
&= \| \sum_{0\leq m+p\leq 2N} \frac{1}{m!}\frac{1}{p!}A^m B^p - \sum_{0\leq m+p\leq N} \frac{1}{m!}\frac{1}{p!}A^m B^p \| \\
&= \| \sum_{N+1\leq m+p\leq 2N} \frac{1}{m!}\frac{1}{p!}A^m B^p \| \\
&\leq \sum_{N+1\leq m+p\leq 2N} \frac{1}{m!}\frac{1}{p!}\|A\|^m \|B\|^p \\
&= \sum_{0\leq m+p\leq 2N} \frac{1}{m!}\frac{1}{p!}\|A\|^m \|B\|^p - \sum_{0\leq m+p\leq N} \frac{1}{m!}\frac{1}{p!}\|A\|^m \|B\|^p \\
&= \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}\|A\|^m\right)\left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}\|B\|^m\right) - \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}(\|A\|+\|B\|)^m\right) \|
\end{aligned}$$

Le passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ nous donne :

$$\|\exp(A)\exp(B) - \exp(A+B)\| \leq \exp(\|A\|)\exp(\|B\|) - \exp(\|A\| + \|B|) = 0$$

d'où $\quad \exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

(b) On a : $I_n = \exp(O_n) = \exp(A+(-A)) = \exp(A)\exp(-A)$ donc $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ avec $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

4. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)^m = diag(\alpha_1^m, ..., \alpha_n^m)$, donc

$$\begin{aligned}
\exp(diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} diag(\alpha_1^m, ..., \alpha_n^m) \\
&= diag(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\alpha_1^m, ..., \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\alpha_n)^m \\
&= diag(\exp(\alpha_1), ..., \exp(\alpha_n))
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$, donc

$$\forall N \in \mathbb{N} \ , \ \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}(P^{-1}AP)^m = P\left(\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!}A^m\right)P^{-1}$$

Le passage à la limite et la continuité de $X \mapsto PXP^{-1}$ nous donne : $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

(c) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, T^m est triangulaire supérieure donc $\exp(T)$ l'est aussi (dans chaque somme partielle, les coefficients au dessous de la diagonale sont nuls, au limite le sont aussi).
Pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $m \in \mathbb{N}$, $(T^m)_{i,i} = t_{i,i}^m$, donc $\forall i = 1, ..., n$, $[\exp(T)]_{i,i} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_{i,i}^m}{m!} = e^{t_{i,i}}$.

(d) A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ de sorte que : $A = PTP^{-1}$ où $T = (t'_{i,j})_{i,j}$ triangulaire et $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
On a : $\exp(T) = \exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ donc $\det(\exp(A)) = \det(T) = \prod_{i=1}^{n}\exp(t_{i,i}) = \exp(\sum_{i=1}^{n} t_{i,i}) = \exp(tr(A))$.

5. En trigonalisant, on obtient : $P^{-1}AP = T$ où

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $T = 2I_3 + J$ avec :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par formule de Binôme : $\forall k \geq 0$, $T^k = 2^k I_3 + k2^{k-1} J + \frac{k(k-1)}{2} J^2$.

donc $\exp(tT) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis

$$\exp(tA) = P \exp(tT) P^{-1} = \frac{e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2t+1 & t & t \\ 2t^2+6 & t^2+2t+1 & t^2+2t \\ -2t^2-10t & -t^2-4t & -t^2-4t+1 \end{pmatrix}$$

Partie V : Application aux systèmes difffétentiels linéaires

1. f est la somme d'une série normalment convergentes sur chaque segment inclus dans I, le théorème de dérivation sous le signe somme implique que f est de classe C^1 sur I avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $f'(t) = Mf(t) = f(t)M$.
2. (a) On pose : $z(t) = \exp(-tA)Y(t)$. On a z est de classe C^1 sur I si, et seulement si Y l'est, car $t \mapsto \exp(-tA)$ est de classe C^1. Et dans ce cas : $z'(t) = \exp(-tA)(Y' - AY)$. Donc

$$\begin{aligned} Y' = AY + B \quad &\Leftrightarrow \quad \exp(-tA)(Y' - AY) = \exp(-tA)B \\ &\Leftrightarrow \quad z'(t) = \exp(-tA)B \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(tA)z'(t) = B \end{aligned}$$

   (b)

   (c) La solution générale de la dernière équation s'écrit : $z(t) = \int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u)du + v$ où $t_0 \in I$ et $v = z(t_0)$,
   donc $Y(t) = \exp(tA)\left(\int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u)du + v\right) = \int_{t_0}^t \exp((t-u)A)B(u)du + \exp(tA)v$.

3. Ici $B=0$ donc $Y(t)=\exp(tA).v$.

Soit $i\in\{1,...,n\}$. On a : $A_{V\,i}=\lambda_i V_i$ entraîne $\forall m\in\mathbb{N}$, $A^m V_i=\lambda_i^m V_i$ puis $\forall N\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}A^m V_i=\sum_{m=0}^{N}\frac{\lambda_i^m}{m!}V_i$, En passant à la limite, on obtient $\exp(tA)V_i=e^{\lambda_i}V_i$.

Soient $\alpha_1,...,\alpha_n$ les coordonnées de v dans la base proposée. On a :

$$\exp(tA)v=\exp(tA)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i V_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\exp(tA)V_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{t\lambda_i}V_i$$

4. Posons $Y(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$.

Le système différentiel est équivalent à $Y'=AY$ où A est la matrice de $Q.IV.5$. La solution générale s'écrit : $Y(t)=\exp(tA)v$ (cette exponetielle est déjà calculée). Les conditions initiales nous donne :

$$\begin{aligned}x(t)&=(7t+1)e^{2t}\\y(t)&=(7t^2+16t+2)e^{2t}\\z(t)&=(-7t^2-30t+3)e^{2t}\end{aligned}$$

Partie VI : Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

1. (a) Soit $\displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}\alpha_i N^i=0$. Supposons que les α_i ne sont pas tous nuls et considéons $p=\min\{i=0,...,s-1\mid\alpha_i\neq\}$. On a :

$$\alpha_p N^p=N^{s-1-p}\left(\sum_{i=p}^{s-1}\alpha_i N^i\right)=N^{s-1-p}\left(\sum_{i=0}^{s-1}\alpha_i N^i\right)=0$$

ce qui est absurde.

(b) Les matrices scalaires commutent avec toute matrice, donc

$$\exp(t(\lambda I_n + N)) = \exp(t\lambda I_n)\exp(tN) = e^{t\lambda}\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{t^k}{k!}N^k\right)$$

2. (a) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-\lambda)^n$. Par Cayley-Hamilton, $\chi(A) = 0$ donc N est nilpotente d'indice au plus n.

(b) Posons $a = Re(\lambda)$, $b = Im(\lambda)$. La solution générale s'écrit :

$$X(t) = \exp(tA).v = e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{t^k}{k!}N^k\right)v$$

où $v \in \mathbb{C}^n$ et s est l'indice de nilpotence de N.
Les coefficients de $X(t)$ sont des expressions poly-expontielles de sorte que :

$$X(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall i = 1,...,n \ , \ P_i(t) = \sum_{k=0}^{s-1}(\sum_{j=1}^{n}(N^k)_{i,j}v_j)\frac{t^k}{k!}$$

• Si $a = 0$ et $A = \lambda I_n$ alors les P_i sont tous constants (car $N = 0$), par suite, $\|X\| = \max(|P_1|,...,|P_n|) < +\infty$, ceci pour tout $v \in \mathbb{C}^n$. • Réciproquement, si toutes les solutions sont bornées, on fixe $v_j =^t (\delta_{i,j})_{1\leq i\leq n}$, soit donc $P_i(t) = \sum_{k=0}^{s-1}(N^k)_{i,j}\frac{t^k}{k!}$, pour tout $i,j = 1,...,n$.
Les solutions particulières associées aux v_j , $j = 1,...,n$ sont bornés, alors $a = 0$ et les P_i , $i = 1,...,n$ sont constants (car sinon, l'une de ses composantes a une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$), donc les $(N^k)_{i,j}$ sont nuls pour $i,j = 1,...,n$ et pour $k \geq 1$, d'où $a = 0$ et $N = 0$.

3. (a) Par théorème de Cayley-Hamilton, $Q(f) = 0$. Le lemme de noyaux permet d'écrire :

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^{q} Ker(f-\lambda_i Id)^{n_i} \qquad (*)$$

Pour chaque $i = 1,...,q$, $Ker(f-\lambda_i Id)^{n_i}$ est stable par f car $(f-\lambda_i Id)^{n_i}$ et f. Si on représente f dans une base $B = \cup_{i=1}^{q} B_i$ adaptée à la décomposition

$(*)$, on tombe sur une matrice diagonale par blocs :

$$M = Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \underline{A_1|} & & O \\ & \ddots & \\ O & & |\overline{A_q} \end{pmatrix}$$

où $\quad Mat_{B_i}(f_{/E_i}) = A_i$ avec $E_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{n_i}$

(b) On pose : $D = diag(\lambda_1 I_{n_1}, ..., \lambda_1 I_{n_q})$ et $N = diag(N_1, ..., N_q)$. On a : $M = D + N$ (et aussi $DN = ND$).
La matrice N est nilpotente d'indice p égal au plus grand indice de nilpotence des N_i , $i = 1, ..., q$.
La solution générale s'écrit : $X(t) = \exp(tA)v = \exp(tN)\exp(tD)v$. Si on adopte les notations de la $Q.V.3$, on obtient :

$$X(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{t\lambda_i} \frac{t^k}{k!} N^k V_i$$

Les composantes sont des combinaisons linéaires de fonctions poly-exponentielles d'expressions sous la forme $\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} Q_i(t)$, et les coefficients des Q_i sont en lien avec les . D'où

$$\begin{aligned} \text{Les solutions sont bornées} \quad &\iff \forall i \ , \ Re(\lambda_i) = 0 \ , \ \forall i \ , \ Q_i = cte \\ &\iff \forall i = 1, ..., q \ , \ \lambda_i \in i\mathbb{R} \ , \ N_i = 0 \\ &\iff \forall i = 1, ..., q \ , \ \lambda_i \in i\mathbb{R} \ , \ M = D \\ &\iff \forall i = 1, ..., q \ , \ \lambda_i \in i\mathbb{R} \ , \ A \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

4. Soit A une matrice réelle antisymétrique. Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont données par : $X(t) = \exp(tA)v$, $v \in \mathbb{C}^n$. Comme $\exp(tA) \in O_n(\mathbb{R})$ car $[\exp(tA)]^T = \exp(tA^T) = \exp(-tA) = [\exp(tA)]^{-1}$, alors $\|\exp(tA)\|_1 \leq n\sqrt{n}$, donc toutes les solutions de cette équation sont bornées, par suite A est diagonalisable de valeurs propres imaginaires pures.

Partie VII : Quelques transformations induites par l'exponentielle matricielle

1. (a) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} X^k \quad , \quad Q(X) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k$ avec $r = s-1$.

   (b) On sait que $e^x = P(x) + o(x^r)$ et $\ln(x+1) = Q(x) + o(x^r)$. En composant, on obtient :

   $$1+x = \exp(\ln(x+1)) = P(Q(x)) + o(x^r) \quad , \quad x = \ln(1+e^x-1) = Q(P(x)-1) + o(x^r)$$

   d'où $\qquad P(Q(x)) = 1 + x + o(x^r)$ et $Q(P(x)-1) = x + o(x^r)$.

   (c) Si on cherche le développement limités précédents autrement ça sera :

   $$P(Q(x)) = T(x) + x^r R(x) \quad , \quad Q(P(x)-1) = S(x) + x^r U(x) \quad \text{avec} \quad \deg T, \deg S \leq r \ , \ R(0) = U(0) = 0$$

   On sait d'après la question précédente que $T(x) = 1 + x$ et $S(x) = x$, donc on a :

   $$P(Q(N)) = T(N) + N^r R(N) = T(N) = I_n + N \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K}) \quad , \quad Q(P(N)-I_n) = S(N) + N^r U(N) = S(N) = N.$$

   car $N^k = 0$ pour tout $k \geq r+1$.
   On en conclut que exp est une application bijective de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ dont l'image réciproque est ln, en effet, pour $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$:

   $$\begin{aligned} \exp(N) = M &\iff Q(N) - I_n = M - I_n \\ &\iff P(Q(N) - I_n) = Q(M - I_n) \\ &\iff N = \ln M \end{aligned}$$

2. (a) Soient $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et $\beta = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On pose : $M = \ln(I_n + N) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha = \ln R + i\theta \in \mathbb{C}^*$. On a :

   $$\exp(\alpha I_n + M) = e^\alpha \exp(M) = \beta(I_n + M)$$

   d'où la surjectivité de exp de V vers W.

(b) Ce n'est pas injective car $(\alpha+2i\pi)I_n+M$ est aussi un antécédent.

3. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $Q^T M Q = D$. les λ_i sont > 0 car M est définie positive, posons donc $\mu_i = \ln \lambda_i$ pour $i = 1, ..., n$ et $\Delta = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$ et $A = Q\Delta Q^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\exp(A) = Q\exp(\Delta)Q^T = Qdiag(e^{\mu_1}, ..., e^{\mu_n})Q^T = QDQ^T = M$$

Pour vos remarques , merci de me contacter sur

taoufiki–maths@hotmail.fr