Exercice

(Noté sur 04 points sur 20)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1.1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A et en déduire que A possède une seule valeur propre λ à préciser.

$$\boxed{\chi_A(x)} = \det(xI_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -2 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

(Sarrus)

$$= (X-3)(X-1)(X-2) - 2 + 2(X-1) - (X-2)$$

(2 racine évidente)

$$= (X-3)(X-1)(X-2) + (X-2)$$

$$= (X-2)\big((X-3)(X-1) + 1\big)$$

$$= (X-2)(X^2 - 4X + 1)$$

$$= \boxed{(X-2)^3}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; 2 l'unique racine de $\chi_A(x)$

1.2. Déterminer $\operatorname{Ker}(v - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre de v associé à son unique valeur propre λ.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(v - 2\,id_{\mathbb{R}^3}) \iff (v - 2\,id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x \qquad = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, z, z)$$

$$\Longleftrightarrow (x, y, z) = z(0, 1, 1)$$

$$\Longleftrightarrow (x, y, z) \in \mathrm{Vect}((0,1,1))$$

C/C : $\ker(v - 2\,id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$

1.3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

(i) A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

car $\dim(E_2(v)) = 1$ différent de la multiplicité de la valeur propre 2 qui est 3.

Ainsi v, puis A, n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

(ii) A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Car $\chi_A(X) = (X-2)^3$ scindé dans $\mathbb{R}$

1.4. On considère l'endomorphisme $u = v - 2\,id_{\mathbb{R}^3}$ et on pose $e_1 = (1, 0, 0)$.

1.4.1. Montrer que l'endomorphisme u est nilpotent.

On a $\chi_v(v) = 0$ d'après Cayley-Hamilton

D'où $(v - 2\,id_{\mathbb{R}^3})^3 = 0$

$\Rightarrow u^3 = 0$

Alors u est nilpotent

1.4.2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme u^2 puis vérifier que $e_1 \notin \operatorname{Ker} u^2$.

i) On veut $\ker(u^2)$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \ker(u^2) \iff u^2(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\iff \left(\vartheta - 2\,id_{\mathbb{R}^3}\right)^2 (x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\iff (A - 2I_3)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff 2x + 2y - 2z = 0$$

$$\iff x + y - z = 0$$

$$\iff x = -y + z$$

$$\iff (x,y,z) = (-y+z, y, z)$$

$$\iff (x,y,z) = y(-1,1,0) + z(1,0,1)$$

$$\iff (x,y,z) \in \operatorname{Vect}\left((-1,1,0) ; (1,0,1)\right)$$

C°: $\ker(u^2) = \operatorname{vect}\left((-1,1,0), (1,0,1)\right)$

ii) $e_1 \notin \ker(u^2)$; En effet

Il s'agit de vérifier que $u^2(e_1) \neq 0$

C.à.d que $(A-2I_3)^2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Et on a :

$$(A-2I_3)^2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

RQ : On vient de voir que :

$(x,y,z) \in \ker(u^2) \iff x+y-z=0$

Donc $e_1 = (1,0,0) \notin \ker(u^2)$ car $1+0-0 \neq 0$

1.4.3. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice T de v dans la base $\mathscr{B}$, puis exprimer la matrice A en fonction de T.

i) M.q. B est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{Card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit de montrer qu'elle libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u^2(e_1) + \beta u(e_1) + \gamma e_1 = 0$ (Ω)

M.q. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Composons dans (Ω) par u^2.

On aura $\gamma u^2(e_1) = 0$; car $u^3 = u^4 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$, car $u^2(e_1) \neq 0$

(Ω) devient $\alpha u^2(e_1) + \beta u(e_1) = 0$

Composons par u, on aura $\beta u^2(e_1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 0}$, car $u^2(e_1) \neq 0$

(Ω) devient $\alpha u^2(e_1) = 0$

Alors $\boxed{\alpha = 0}$, car $u^2(e_1) \neq 0$

Enfin $\{\alpha = \beta = \gamma = 0\}$

ii) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(v) = T = ?$

$v = u + 2\,id_{\mathbb{R}^3}$

$\boxed{v(e_1) = u(e_1) + 2e_1}$

$\boxed{v(u(e_1)) = u^2(e_1) + 2\,u(e_1)}$

$\boxed{v(u^2(e_1)) = \underbrace{u^3(e_1)}_{=0} + 2\,u^2(e_1) = 2\,u^2(e_1)}$

D'où $T = \underset{B}{\mathrm{mat}}(v) = \begin{array}{c|ccc} & v(u^2(e_1)) & v(u(e_1)) & v(e_1) \\ \hline u^2(e_1) & 2 & 1 & 0 \\ u(e_1) & 0 & 2 & 1 \\ e_1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$

iii) $\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(v) = A$; $\underset{B}{\mathrm{mat}}(v) = T$

On a $\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(v) = P\ \underset{B}{\mathrm{mat}}(v)\ P^{-1}$

où $P = P_{B_c, B}$ la matrice de passage de B_c à B.

$\Longrightarrow \quad A = P\,T\,P^{-1}$

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow u(e_1) = (1, 1, 2)$

$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow u^2(e_1) = (0, 2, 2)$

Ainsi $P = \underset{B_c}{\mathrm{mat}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.4. Calculer l'exponentielle de la matrice A. *On rappelle que* $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

$$A = PTP^{-1} \Longrightarrow \boxed{\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + 2I_3$$

$$\text{où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(T) = \exp(N + 2I_3)$$

$$= \exp(N)\exp(2I_3) \quad \left(\text{car } N \text{ et } (2I_3) \text{ commutent}\right)$$

$$\exp(2I_3) = \begin{pmatrix} e^2 & & 0 \\ & e^2 & \\ 0 & & e^2 \end{pmatrix} = e^2 I_3$$

« $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ »

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$$

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $N^3 = 0$

$$\Rightarrow \exp(N) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} N^k \quad (\forall k \geq 3, N^k = 0)$$

$$\boxed{\exp(N) = I_3 + N + \frac{1}{2} N^2}$$

$$\Rightarrow \quad \exp(T) = e^2 \left(I_3 + N + \frac{1}{2} N^2 \right)$$

$$\boxed{\exp(T) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Avec $\left(\exp(A) = P \exp(T) P^{-1} \right)$

et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

on a :

$$\exp(A) = \frac{e^2}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\parallel} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^2}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{\parallel}$$

$$\exp(A) = \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

C/C : $\exp(A) = e^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode 2 (Plus rapide)

Posons $B = A - 2I_3$, on a $B^3 = 0$

$$\Longrightarrow \exp(B) \overset{\text{facile}}{=\!=\!=} I_3 + B + \frac{1}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Car $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\frac{B^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Et on a :

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(B + 2I_3) \\ &= \exp(B) \cdot \underbrace{\exp(2I_3)}_{=} \quad \text{(car } B \text{ et } 2I_3 \text{ commutent)} \\ &= \exp(B) \cdot e^2 \cdot I_3 \\ &= e^2 \cdot \exp(B) \\ &= e^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fin

CNC – 2019 – MP – Math 2

Problème

2.1

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

On a $a_{i_1} = a_{i_2}$ et $i_1 \neq i_2$

Alors les deux lignes L_{i_1} et L_{i_n} sont égales

D'où $\boxed{\Delta_n = 0}$

2.2 $\left(\prod_{1 \leq j \leq n-1} (X - b_j)\right) \wedge \left(\prod_{1 \leq k \leq n} (X + a_k)\right) = 1$?

$\left(\forall 1 \leq j \leq n-1, \forall 1 \leq k \leq n, \ b_j \neq -a_k \right)$ (car $b_j + a_k \neq 0$)

$\Rightarrow \left(\forall 1 \leq j \leq n-1, \forall 1 \leq k \leq n, \ (X - b_j) \wedge (X + a_k) = 1 \right)$

D'où $\left(\prod_{1 \leq j \leq n-1} (X - b_j)\right) \wedge \left(\prod_{1 \leq k \leq n} (X + a_k)\right) = 1$

Piste 2

Les polynômes $\left(\prod_{1 \leq j \leq n-1} (X - b_j)\right)$ et $\left(\prod_{1 \leq k \leq n} (X + a_k)\right)$ sont scindés et n'ont aucune racine commune

Donc ils sont premiers entre eux

2.3.1 $R(X) = \dfrac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)}{\prod_{1\leq k\leq n}(X+a_k)}$.

Pour tout $1\leq k\leq n$, $(-a_k)$ est une racine de $\prod_{1\leq k\leq n}(X+a_k)$

et n'en est pas pour $\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)$.

D'où les pôles de $R(X)$ sont les $(-a_k)$, pour tout $1\leq k\leq n$.

En plus, ils sont tous simples car tous racines simples de $\prod_{1\leq k\leq n}(X+a_k)$.

2.3.2

$R(X) = \dfrac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)}{\prod_{1\leq j\leq n}(X+a_j)} \in \mathbb{R}(X)$ et $d^\circ(R) = -1 < 0$

en plus tous ses pôles, $(-a_j)_{1\leq j\leq n}$, sont simples

Alors la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\boxed{R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X+a_k}} \quad (\Omega)$$

$$R(X) = \frac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(X-b_j)}{\prod_{1\leq j\leq n}(X+a_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X+a_k} \quad (\Omega)$$

Soit $1\leq k\leq n$, $\alpha_k = ?$

Multiplions dans (Ω) par $(X+a_k)$, puis faisons tendre X vers $(-a_k)$, on obtient :

$$\alpha_k = \frac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(-a_k-b_j)}{\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(-a_k+a_j)} = \frac{(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(a_k+b_j)}{(-1)^{n-1}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(a_k-a_j)}$$

C/c :

$$\forall 1\leq k\leq n, \quad \alpha_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(a_k+b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)}$$

2.4.1

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Notons $L'_1, \dots, L'_n$ ces lignes.

Notons $$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \cdots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

La dernière ligne est :

$$\left(\left[\frac{\alpha_1}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a_n+b_1}\right] \cdots \left[\frac{\alpha_1}{a_1+b_n} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a_n+b_n}\right] \right)$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\left(\frac{1}{a_1+b_1} \cdots \frac{1}{a_1+b_n}\right)}_{L'_1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\left(\frac{1}{a_n+b_1} \cdots \frac{1}{a_n+b_n}\right)}_{L'_n}$$

$$= \alpha_1 L'_1 + \cdots + \alpha_{n-1} L'_{n-1} + \alpha_n L'_n$$

Avec $L_n \leftarrow L_n - (\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_{n-1} L_{n-1})$ dans le déterminant Δ on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{\alpha_n}{a_n+b_1} & \frac{\alpha_n}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{\alpha_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha_n \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \alpha_n \, \Delta_n} \quad \text{CQFD}$$

2.4.2

On a $\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \cdots & R(b_n) \end{vmatrix}$

Or $R(b_1) = \cdots = R(b_{n-1}) = 0$

Alors $\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \cdots\, 0 & R(b_n) \end{vmatrix}$

En développant suivant la dernière ligne, on a :

$$\alpha_n \Delta_n = R(b_n)\,\Delta_{n-1}$$

2.4.3

(i) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{(a_2+b_1)(a_1+b_2) - (a_1+b_1)(a_2+b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\,(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$\boxed{\Delta_2 = \frac{a_2 b_2 + a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}}$$

(ii) Mq que :

$$\forall n \geq 2, \quad \Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$

$$\Delta_2 = \frac{(a_2 - a_1) b_2 + (a_1 - a_2) b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq 2} (a_i + b_j)}$$

Hérédité :

Soit $n \geq 2$.

Supposons que $\Delta_{n-1} = \dfrac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}$

Et montrons que $\Delta_n = \dfrac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$

On a :

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\alpha_n} \Delta_{n-1}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(b_n + a_k)} \cdot \frac{\prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne n}}(a_n - a_j)}{\prod_{j=1}^{n-1}(a_n + b_j)} \cdot \Delta_{n-1}$$

HR.

$$= \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)(a_n - a_j)\right)}{\prod_{k=1}^{n}(b_n + a_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1}(a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{1 \le i < j \le n-1}(a_j - a_i)(b_j - }{\prod_{1 \le i, j \le n-1}(a_i + b_j)}$$

Savirez-vous ?

$$\left(\prod_{1 \le i < j \le n-1} x_{ij}\right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \le i < j \le n} x_{ij}$$

Réponse

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_{in}\right)$$

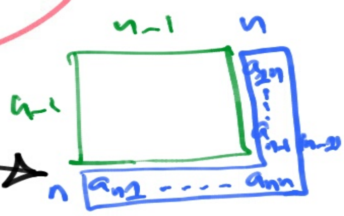
NB

$$\left(\prod_{1 \le i, j \le n-1} x_{ij}\right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \le i, j \le n} x_{ij}$$

Réponse

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_{in}\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_{ni}\right)$$

NB



$$\Delta_n = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)(a_n - a_j)\right)}{\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n-1}(a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1}(a_i + b_j)}$$

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n}(a_i + b_j)}$$

CQFD

Fin partie I

2ème partie

3.1 (i)

$$|G(u_1,u_2)| = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix}$$

$$= (u_1|u_1)(u_2|u_2) - (u_1|u_2)^2 \geqslant 0$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

(ii) $|G(u_1,u_2)| = 0 \iff (u_1|u_2)^2 = (u_1|u_1)(u_2|u_2)$

$\iff (u_1,u_2)$ est lié

C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.2 On a $G(u_1,\dots,u_p) = \left((u_i|u_j)\right)_{1\leq i,j\leq p}$

et que : $\left(\forall\, 1 \leq i,j \leq p,\ (u_i|u_j) = (u_j|u_i)\right)$

D'où la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$ est symétrique

3.3.1

$$|G(w_1,\dots,w_p)| = \begin{vmatrix} (w_1|w_1) & \cdots & (w_1|w_i) & \cdots & (w_1|w_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i|w_1) & \cdots & (w_i|w_i) & \cdots & (w_i|w_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_p|w_1) & \cdots & (w_p|w_i) & \cdots & (w_p|w_p) \end{vmatrix}$$

si $(\forall k \neq i,\ w_k = u_k)$, alors :

$$|G(w_1,\dots,w_p)| = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|w_i) & \cdots & (v_1|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i|v_1) & \cdots & (w_i|w_i) & \cdots & (w_i|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|w_i) & \cdots & (v_p|v_p) \end{vmatrix}$$

On a : $w_i = v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (w_i|v_1) = (v_i|v_1) + \sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_1) \\ \dots \\ (w_i|v_p) = (v_i|v_p) + \sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_p) \end{cases}$$

La ième ligne de $|G(w_1,\dots,w_p)|$ est alors :

$$\big((v_i|v_1) \dots (v_i|v_p)\big) + \Big(\sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_1) \dots \sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_p)\Big)$$

Càd : $\big((v_i|v_1) \dots (v_i|v_p)\big) + \sum_{j\neq i} \lambda_j \underbrace{\big((v_j|v_1) \dots (v_j|v_p)\big)}_{= L_j \text{, la } j^{\text{ème}} \text{ ligne}}$

Alors avec $L_i \leftarrow L_i - \sum_{j\neq i} \lambda_j L_j$, on aura :

$$|G(w_1,\dots,w_p)| = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|w_i) & \cdots & (v_1|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_i|v_1) & \cdots & (v_i|w_i) & \cdots & (v_i|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|w_i) & \cdots & (v_p|v_p) \end{vmatrix}$$

On fait de même pour la ième colonne :

On a : $w_i = u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_1 | w_i) = (u_1 | u_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_1 | u_j) \\ \quad \ldots \\ (u_p | w_i) = (u_p | u_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_p | u_j) \end{cases}$$

La ième colonne de $|G(w_1, \ldots, w_p)|$ est alors :

$$\begin{pmatrix} (u_1 | u_i) \\ \vdots \\ (u_p | u_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_1 | u_j) \\ \vdots \\ \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_p | u_j) \end{pmatrix}$$

Càd $\begin{pmatrix} (u_1 | u_i) \\ \vdots \\ (u_p | u_i) \end{pmatrix} + \sum_{j \neq i} \lambda_j \underbrace{\begin{pmatrix} (u_1 | u_j) \\ \vdots \\ (u_p | u_j) \end{pmatrix}}_{= C_j \text{ : la jème Colonne}}$

Alors avec $C_i \leftarrow C_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, on aura :

$$|G(w_1, \ldots, w_p)| = \begin{vmatrix} (u_1 | u_1) & \cdots & (u_1 | u_i) & \cdots & (u_1 | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_i | u_1) & \cdots & (u_i | u_i) & \cdots & (u_i | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p | u_1) & \cdots & (u_p | u_i) & \cdots & (u_p | u_p) \end{vmatrix}$$

$$= |G(u_1, \ldots, u_p)|$$

CQFD

3.3.2 Supp que $(v_1, \dots, v_p)$ est lié.

Alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j = 0 \\ \exists i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_i U_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j U_j = 0$$

$$\Rightarrow U_i + \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} U_j = 0$$

Notons pour tout $j \neq i$, $\lambda_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$.

On a alors $U_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j U_j = 0$

Posons $\begin{cases} w_k = v_k \text{ , pour tout } k \neq i \\ w_i = v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j U_j \end{cases}$

D'après 3.3.1 on a : $|G(w_1, \dots, w_p)| = |G(v_1, \dots, v_p)|$

Or $w_i = 0$ alors $|G(w_1, \dots, w_p)| = 0$, car $L_i = 0$

D'où $|G(v_1, \dots, v_p)| = 0$ CQFD

3.4.1 On a $\begin{cases} u_j = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} e_k \\ u_i = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} e_k \end{cases}$

et $(e_1, \dots, e_p)$ base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

Alors $(u_i | u_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} \, b_{k,j}$

3.4.2 Soit $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$.

Il s'agit de montrer que $(u_i | u_j) = ({}^tB.B)_{ij}$

On a $$({}^tB\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tB)_{ik} \, (B_{kj})$$
$$= \sum_{k=1}^{p} B_{ki} \, B_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} b_{ki} \, b_{kj} \qquad \| \; B_{ij} = b_{ij}$$
$$= (u_i | u_j) \quad (\text{d'après } 3.4.1)$$

3.4.3 $$|G(u_1, \dots, u_p)| = \det({}^tB.B)$$
$$= \underbrace{\det({}^tB)}_{= \det(B)} \det(B)$$
$$= (\det(B))^2 \geqslant 0$$

Reste à justifier que $\det(B) \neq 0$.

On a $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}$; avec $\begin{cases} u_j = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} e_k \\ \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$

Càd $B = \underset{(e_1,\dots,e_p)}{\mathrm{mat}}(v_1,\dots,v_p)$ qui est inversible

en tant que matrice d'une base dans une base

(ou matrice de passage d'une base à une base)

D'où $\det(B) \neq 0$

3.5.1 $\quad x = \underbrace{\left(x - P_F(x)\right)}_{\in F^\perp} + P_F(x)$ et $\left(x - P_F(x)\right) \in F^\perp$

$$G(v_1,\dots,v_n,x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|x) \\ (x|v_1) & \dots & (x|v_n) & (x|x) \end{vmatrix}$$

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on a :

$$\begin{cases} (v_i|x) = \underbrace{\left(v_i \,|\, (x - P_F(x))\right)}_{=0} + (v_i \,|\, P_F(x)) = (v_i \,|\, P_F(x)) \\ (x|v_i) = (P_F(x) \,|\, v_i) \end{cases}$$

Et $(x|x) = \|P_F(x) + (x - P_F(x))\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$

$$G(v_1,\dots,v_n,x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) + 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) + 0 \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) + \|x - P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$G(v_1,\dots,v_n,x)=\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x))+0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x))+0 \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x))+\|x-P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) \end{vmatrix}}_{=|G(v_1,\dots,v_n,P_F(x))|} +$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & 0 \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & \|x-P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}}_{=\|x-P_F(x)\|^2\,|G(v_1,\dots,v_n)|}$$

3.5.2

$P_F(x)\in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n) \Rightarrow (v_1,\dots,v_n,P_F(x))$ lié

$\Rightarrow |G(v_1,\dots,v_n,P_F(x))|=0$

3.5.1 $\Rightarrow |G(v_1,\dots,v_n,x)|=\underbrace{\|x-P_F(x)\|^2}_{=(d(x,F))^2}\,|G(v_1,\dots,v_n)|$

D'où $$d(x,F) = \sqrt{\frac{|G(v_1,\dots,v_n,x)|}{|G(v_1,\dots,v_n)|}}$$

3.6.1 $$\det_{B_c}(v_1,\dots,v_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & 1 \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

où B_c la base canonique de $\mathbb{R}^n$

D'où $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

3.6.2 $\begin{cases} \text{Si } i \leq j ; (v_i|v_j) = i \\ \text{Si } i > j ; (v_i|v_j) = j \end{cases}$

$$\Longrightarrow \left(\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, (v_i|v_j) = \min(i,j) = a_{ij} \right)$$

D'où $A_n = \left((v_i|v_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 1}$, qui est donc une matrice de Gram.

3.6.3

i) A_n est une matrice <u>symétrique</u> <u>réelle</u>

Donc elle est <u>orthogonalement diagonalisable</u>.

ii) <u>Soit $\lambda \in Sp(A_n)$, mq que $\lambda > 0$</u>

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_n X = \lambda X$.

3.4.2 $\Rightarrow$ (il existe une matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tB . B$)

$$A_n X = \lambda X \Rightarrow {}^tB\,B\,X = \lambda . X$$

$$\Rightarrow {}^tX . {}^tB\,B\,X = {}^tX . (\lambda X)$$

$$\Rightarrow {}^t(BX) . (BX) = \lambda ({}^tX . X)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|BX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \\ \text{où } \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

Et on a $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$.

et $\|BX\|^2 > 0$ car $BX \neq 0$, puis $X \neq 0$ et B inversible

D'où $\boxed{\lambda > 0}$

Fin partie 2

Partie 3

4.1 (cours)

4.2.1 $P_k = X^k$

$$(P_{n_i} \mid P_{n_j}) = \frac{1}{n_i+n_j+1}$$

4.2.2

$$|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})| = \begin{vmatrix} (P_{n_1}\mid P_{n_1}) & \cdots & (P_{n_1}\mid P_{n_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ (P_{n_p}\mid P_{n_1}) & \cdots & (P_{n_p}\mid P_{n_p}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{(n_1+1)+n_1} & \cdots & \frac{1}{(n_1+1)+n_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(n_p+1)+n_1} & \cdots & \frac{1}{(n_p+1)+n_p} \end{vmatrix}$$

$= \Delta_p$; le déterminant de Cauchy d'ordre p associé à la famille $(n_k+1)_{1\leq k\leq p}$ et $(n_k)_{1\leq k\leq p}$

D'où d'après 2.4.3 on a :

$$|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})| = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq p}\big((n_j+1)-(n_i+1)\big)(n_j-n_i)}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq p}(n_i+1+n_j)}$$

$$\boxed{|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})| = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq p}(n_j-n_i)^2}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq p}(n_i+1+n_j)}}$$

4.2.3 $(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$

Comme famille de polynômes non nuls échelonnée de degrés.

4.2.4 Soit $r \in \mathbb{N}$.

Mq que : $d(P_r, W_p) = \frac{1}{\sqrt{2r+1}} \prod_{k=1}^{p} \frac{|n_k - r|}{n_k + r + 1}$

$(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une base de W_p.

$(3.5.2) \Rightarrow d(P_r, W_p) = \sqrt{\frac{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}, P_r)|}{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})|}}$

$(4.2.2) \Rightarrow |G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_j - n_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)}$ (les n_i distincts 2 à 2)

$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}, P_r)| = ?$

Cas 1 : Si $r \in \{n_1, \dots, n_p\}$

$P_r \in W_p \Rightarrow d(P_r, W_p) = 0$

et $\prod_{k=1}^{p} \frac{|n_k - r|}{n_k + r + 1} = 0$

Alors l'égalité voulue est vérifiée

Cas 2 : Si $r \notin \{n_1, \dots, n_p\}$

Alors les entiers $n_1, \dots, n_p, r$ sont distincts deux à deux.

D'après (4.2.2) on a :

$$|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p},P_r)| = \frac{\left[\prod\limits_{1\le i<j\le p}(n_j-n_i)\right]^2\cdot\left[\prod\limits_{i=1}^{p}(r-n_i)\right]^2}{\left[\prod\limits_{1\le i,j\le p}(n_i+n_j+1)\right]\left[\prod\limits_{i=1}^{p}(r+n_i+1)\right]^2(r+r+1)}$$

Schéma illustratif :

$$\begin{array}{ccc|c}
(n_1,n_1) & \cdots & (n_1,n_p) & (n_1,r)\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
(n_p,n_1) & \cdots & (n_p,n_p) & (n_p,r)\\
\hline
(r,n_1) & \cdots & (r,n_p) & (r,r)
\end{array}$$

Avec $|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})| = \dfrac{\prod\limits_{1\le i<j\le p}(n_j-n_i)^2}{\prod\limits_{1\le i,j\le p}(n_i+1+n_j)}$

On a :

$$d(P_r,W_p) = \sqrt{\frac{|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p},P_r)|}{|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})|}}$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{p}|r-n_i|}{\left(\prod\limits_{i=1}^{p}(r+n_i+1)\right)\cdot\sqrt{2r+1}}$$

4.3.1 Il s'agit de montrer que :

$$\exists! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \ \psi(a_1, \dots, a_n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \psi(x_1, \dots, x_n)$$

D'autre part :

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 (1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2 \, dt$$

$$= (1 - a_1 X - \dots - a_n X^n | 1 - a_1 X - \dots - a_n X^n)$$

$$= \| 1 - a_1 X - \dots - a_n X^n \|_2^2$$

$$= \| 1 - (a_1 X + \dots + a_n X^n) \|_2^2$$

$$\boxed{\psi(x_1, \dots, x_n) = \left(d(1, a_1 X + \dots + a_n X^n) \right)^2}$$

Alors il s'agit de montrer que :

$$\exists! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left(d(1, a_1 X + \dots + a_n X^n) \right)^2 = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \left(d(1, x_1 X + \dots + x_n X^n) \right)^2$$

Càd :

$$\exists! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, d(1, a_1 X + \dots + a_n X^n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} d(1, x_1 X + \dots + x_n X^n)$$

Notons $F = \{ x_1 X + \dots + x_n X^n / (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \}$

Il s'agit de montrer que :

$$\exists! Q \in F, d(1, Q) = \inf_{P \in F} (d(1, P)) = d(1, F)$$

Càd : $\left(\exists!\, Q \in F,\ d(1, Q) = d(1, F)\right)$

Ce qui est vrai car F est un sev de dimension finie $(= n)$ de l'espace préhilbertien réel $(\mathbb{R}[X], (\cdot|\cdot))$

4.3.2 Soit $(a_1, \dots, a_n)$ l'unique point de $\mathbb{R}^n$ dans 4.3.1

Càd $Q(X) = a_1 X + \dots + a_n X^n$ est l'unique élément de F vérifiant $d(1, Q) = d(1, F)$.

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \|1 - Q\|^2$$

$$= \left(d(1, F)\right)^2 \quad \left(\begin{array}{c}\text{on applique} \\ (4.2.4)\end{array}\right)$$

On a $F = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n) = \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_n)$

Alors :

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \left(d(P_0, F)\right)^2 \quad \left\|\begin{array}{l} r = 0 \\ n_1 = 1 \\ \vdots \\ n_n = n \end{array}\right.$$

$$\overset{4.2.4}{=\!=} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \times 0 + 1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{|k - 0|}{(k + 0 + 1)}\right)^2$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right)^2 \quad \text{(Produit télescopique)}$$

Cc : $\boxed{\varphi(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(n+1)^2}}$

Fin