ROYAUME DU MAROC

المملكة المغربية

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2015

École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique

ENSEM

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission dans les Établissements de Formation

d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Édition 2015

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Filière **PSI**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Quelques propriétés du groupe spécial orthogonal $SO_2(\mathbb{R})$
Application à la non continuité de la diagonalisation en dimension 2

On sait que toute matrice M, carrée réelle d'ordre 2, ayant deux valeurs propres réelles distinctes, est diagonalisable ; c'est-à-dire que M est conjuguée à une matrice diagonale. On se demande ici si l'on peut réaliser cette diagonalisation de manière continue ; autrement dit :

Peut-on choisir la matrice réelle conjuguant M à une matrice diagonale de façon à ce qu'elle dépende continûment de M ?

Le but de ce problème est de démontrer que cela n'est pas possible sur tout l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 ayant deux valeurs propres réelles distinctes

Notations et rappels

Dans ce problème, on note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à 2 lignes et une colonne et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; I_2 désignera la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le groupe de matrices inversibles (groupe linéaire).

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace, $\det(A)$ son déteminant et $\mathcal{X}_A$ son polynôme caractéristique.

Si M est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M. Une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle coïncide avec sa matrice transposée. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notera $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ se notera $<\ ,\ >$ et la norme associée sera notée $\|.\|_2$; il est défini par $(X,Y) \longmapsto <X,Y> := {}^tXY$.

On note $\mathcal{U}$ la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices ayant **deux valeurs propres réelles distinctes.**

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni de l'une de ses normes.

1ère Partie
Résultats préliminaires

1.1. Étude de l'ensemble $\mathcal{U}$

1.1.1. Montrer que $\mathcal{U} = \Big\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ \big(\mathrm{Tr}\,(A)\big)^2 - 4\det A > 0\Big\}$.

1.1.2. Montrer que les applications $A \longmapsto \mathrm{Tr}\,(A)$ et $A \longmapsto \det A$, définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles, sont continues.

1.1.3. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, dessiner le graphe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4}x^2$ puis préciser, en l'hachurant sur le même graphique, la partie de $\mathbb{R}^2$ correspondant à l'ensemble $\big\{\big(\mathrm{Tr}\,(A), \det A\big)\ ;\ A \in \mathcal{U}\big\}$.

1.1.5. On pose $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ b \neq 0\right\}$.

Justifier que toute matrice de $\mathcal{U}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et construire une application $f_1 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue, à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $f_1(M)^{-1}Mf_1(M)$ soit diagonale.

1.2. Commutant d'une matrice diagonale.

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\alpha \neq \beta$.

1.2.1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ MB = BM\}$.

1.2.2. Soit $U,\ V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $U\,BU^{-1} = V\,BV^{-1}$ si, et seulement si, la matrice $V^{-1}U$ est diagonale.

1.3. Une CNS de conjugaison à une matrice diagonale

Soit $(M, P) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et soit $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que $P^{-1}MP = D$ si, et seulement si, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M et les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de M. On pourra effectuer un produit par blocs.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Quelques propriétés du groupe spécial orthogonal en dimension 2

On rappelle que $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ {}^tAA = I_2\}$ et $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R})\ ;\ \det A = 1\}$.

2.1. Montrer que $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ a^2 + b^2 = 1\right\}$.

2.2. Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2.3. On définit l'application $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2.3.1. Montrer que l'application Φ est continue.

2.3.2. Montrer que $\Phi(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$.

2.4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque ; on pose $\mathscr{S}_A = \{UAU^{-1}\ ;\ U \in SO_2(\mathbb{R})\}$

2.4.1. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tM$, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est continue.

2.4.2. En déduire que l'application $U \longmapsto U^{-1}$, définie sur $SO_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est continue.

2.4.3. Montrer alors que l'application $U \longmapsto UAU^{-1}$, définie sur $SO_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathscr{S}_A$, est continue.

2.4.4. On considère deux réels α et β tels que $\alpha \neq \beta$ et on pose $B_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Soit $\sigma : \mathscr{S}_A \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une application continue telle que $\sigma(\mathscr{S}_A) \subset \{B_1, B_2\}$. Montrer que σ est constante.

On pourra, moyennant ce qui précède, construire une application continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même dont l'ensemble image est contenu dans $\{\alpha, \beta\}$.

$3^{\text{ème}}$ Partie
Non continuité de la diagonalisation dans tout l'ouvert $\mathcal{U}$

On suppose qu'il existe une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **continue**, à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, la matrice $f(M)^{-1}Mf(M)$ soit diagonale.

3.1. On considère $M \in \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et on note $C_1(M)$ (resp. $C_2(M)$) la première (resp. la deuxième) colonne de la matrice $f(M)$.

3.1.1. Montrer que $C_1(M)$ et $C_2(M)$ sont des vecteurs propres de M associés à des valeurs propres distinctes et prouver qu'ils sont orthogonaux dans $(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), <,>)$.

3.1.2. Justifier que la matrice dont la première (resp. la deuxième) colonne est $\frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ (resp. $\frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2}$) est orthogonale.

On note $\alpha(M)$ le déterminant de la matrice décrite ci-dessus et $g(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont la première (resp. la deuxième) colonne est $\alpha(M)\frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ (resp. $\frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2}$).

3.1.3. Vérifier que $g(M) \in SO_2(\mathbb{R})$.

On dispose ainsi d'une application $g : \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $SO_2(\mathbb{R})$.

3.1.4. Montrer que g est continue et que, pour tout $M \in \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, la matrice $g(M)^{-1}Mg(M)$ est diagonale.

3.2. On considère une matrice diagonale $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $\alpha \neq \beta$.

3.2.1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_B = \{UBU^{-1}\ ;\ U \in SO_2(\mathbb{R})\}$ est une partie de $\mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on note h la restriction de g à $\mathscr{S}_B = \{UBU^{-1}\ ;\ U \in SO_2(\mathbb{R})\}$.

3.2.2. Montrer que, pour tout $M \in \mathscr{S}_B$, la matrice $h(M)^{-1}Mh(M)$ est diagonale et est semblable à B. Quelles en sont les valeurs possibles ?

3.2.3. En déduire que l'application $M \longmapsto h(M)^{-1}Mh(M)$ est constante sur $\mathscr{S}_B$.

3.2.4. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $h(M)^{-1}Mh(M) = B$, pour tout $M \in \mathscr{S}_B$.

3.3. On reprend les notations de la question **3.2.** précédente et on suppose désormais que, pour toute matrice $M \in \mathscr{S}_B$, $h(M)^{-1}Mh(M) = B$.

3.3.1. Montrer que, pour tout $U \in SO_2(\mathbb{R})$, la matrice $h(UBU^{-1})^{-1}U$ est diagonale puis justifier qu'elle est égale à $\pm I_2$.

3.3.2. Soient $\varphi : SO_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\}$ et $\psi : \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R})$ les applications définies par : $\varphi(U) = \big(UBU^{-1},\ h(UBU^{-1})^{-1}U\big)$ et $\psi(M, D) = h(M)D$.

Montrer que φ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

3.3.3. Montrer que l'application $U \longmapsto \mathrm{Tr}\big(h(UBU^{-1})^{-1}U\big)$, définie sur $SO_2(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles, est continue et a pour ensemble image la paire $\{-2, 2\}$.

3.3.4. Trouver une contradiction et conclure qu'une telle application f n'existe pas.

Fin de l'épreuve