Concours National Commun
Session 2016
Filière PSI

Épreuve de Mathématiques II : Un corrigé [1]

Problème 1

Partie I

1. ($\Longrightarrow$) Supposons que p est une projection sur F parallèlement à G.

Soient $x \in E$ et $(x_1, x_2) \in F \times G$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a $p(x) = x_1$ et, comme $x_1 = x_1 + 0 \in F \oplus G$, alors $p(x_1) = x_1$, par suite $p \text{ o } p(x) = p(x_1) = x_1 = p(x)$, dès lors $p \text{ o } p = p$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $p \text{ o } p = p$. Montrons d'abord que $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$.

- Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Im}(p) \cap \ker(p) \quad & \Longleftrightarrow \quad x \in \operatorname{Im} p \text{ et } x \in \ker p \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists x' \in E \ : \ x = p(x') \text{ et } p(x) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists x' \in E \ : \ x = p(x') \text{ et } p(p(x')) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists x' \in E \ : \ x = p(x') \text{ et } p(x') = 0 \quad \text{ car } p \text{ o } p = p \\
& \Longrightarrow \quad x = 0,
\end{aligned}$$

  donc $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \{0\}$.

- Soit $x \in E$. On pose $x_1 = p(x)$ et $x_2 = x - p(x)$.

  On a

  - $x_1 = p(x) \in \operatorname{Im}(p)$,
  - $x_2 \in \ker(p)$, car $p(x_2) = p(x) - p\text{o}p(x) = p(x) - p(x) = 0$
  - $x = x_1 + x_2$,

  donc $E = \operatorname{Im}(p) + \ker(p)$.

Ainsi $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

Reste à vérifier que p est une projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. On vient de voir que

$$\forall x \in E, \ \ x = p(x) + (x - p(x)) \in \operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p),$$

donc p est une projection sur $F = \operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $G = \ker(p)$.

2. Notons $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = A = \frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

donc $g(e_1) = \dfrac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_3) = \dfrac{1}{2}(2,1,1)$, $g(e_2) = \dfrac{1}{2}(e_2 - e_3) = \dfrac{1}{2}(0,1,-1)$ et $g(e_3) = \dfrac{1}{2}(-e_2 + e_3) = \dfrac{1}{2}(0,-1,1)$.

1. Ce corrigé est proposé par Adham Elbekkali, professeur de mathématiques de la classe PCSI 2 au CPGE de Tanger

(a) On a $A^2 = A$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ et par suite $g^2 = g$, ainsi, d'après la question **I.1**, g est une projection sur $F = \text{Im}(g)$ parallèlement à $G = \ker(g)$.

On a

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \{g(u) \ : \ u \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{g(xe_1 + ye_2 + ze_3) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\left(g(e_1), g(e_2), g(e_3)\right) \\ &= \text{Vect}\left(\frac{1}{2}(2,1,1), \frac{1}{2}(0,1,-1), \frac{1}{2}(0,-1,1)\right) \\ &= \text{Vect}\left((2,1,1), (0,1,-1)\right) \\ &= \text{Vect}(u, v), \end{aligned}$$

avec $u = (2,1,1)$ et $v = (0,1,-1)$.

Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} u \in \ker(g) &\iff g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^3}) \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\,\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(0_{\mathbb{R}^3}) \\ &\iff AU = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 0 \\ x + y - z &=& 0 \\ x - y + z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ z &=& y \end{array}\right., \end{aligned}$$

donc $\ker(g) = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0 \text{ et } y = z\} = \{(0, y, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(w)$ avec $w = (0,1,1)$.

(b) Puisque g est une projection, alors $g^2 - g = 0$, donc $P = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de g et, comme $P = X(X-1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, alors [2] g est diagonalisable.

(c)
- On a $F = \text{Vect}(u, v)$, donc la famille (u, v) est génératrice de F et, comme u et v ne sont pas colinéaires, alors elle libre, ainsi (u, v) est une base de F.
- On a $G = \text{Vect}(w)$, donc la famille (w) est génératrice de F et, comme w est non nul, alors elle libre, ainsi (w) est une base de G.
- On vient de montrer que (u, v) est une base de F et (w) est une base de G et, comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, alors $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient E un e.v. sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si l'endomorphisme u possède un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples, alors l'endomorphisme u est diagonalisable.

- Puisque g est une projection sur F parallèlement à G, $u, v \in F$ et $w \in G$, alors $g(u) = u$, $g(v) = v$ et $g(w) = 0$, ainsi

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(u) & g(v) & g(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

finalement

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = PDP^{-1},$$

avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Soit $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} e \in F^{\perp} &\iff e \in (\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp} \\ &\iff \langle e, u\rangle = \langle e, v\rangle = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}, \end{aligned}$$

donc $F^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = -z \text{ et } y = z\} = \{(-z, z, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a = (-1, 1, 1)$. Ainsi $a \in F^{\perp}$ et $E = F \oplus F^{\perp} = F \oplus D$, avec $D = \mathrm{Vect}(a)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^{\perp}$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in D \times D^{\perp}$ tel que $x = x_1 + x_2$ $(\star)$ et $p_D(x) = x_1$. Comme $x_1 \in D$ et $D = \mathrm{Vect}(a)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 = \lambda a$. Donc la relation $(\star)$ devient $x = \lambda a + x_2$, du coup

$$\begin{aligned} \langle a, x\rangle &= \langle a, \lambda a + x_2\rangle \\ &= \lambda \langle a, a\rangle + \langle a, x_2\rangle \\ &= \lambda \|a\|^2, \qquad \text{car } a \in D \text{ et } x_2 \in D^{\perp} \end{aligned}$$

d'où $\lambda = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2}$ et en suite $p_D(x) = x_2 = \lambda a = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2} a$.

(c) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad x = p_D(x) + p_{D^{\perp}}(x),$$

donc, en vertu de la question précédente, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad p_{D^{\perp}}(x) = x - p_D(x) = x - \frac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2} a.$$

(d) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \alpha u + \beta v + \gamma a,$$

donc

$$\begin{cases} \langle u, \alpha u + \beta v + \gamma a\rangle = \langle u, w\rangle \\ \langle v, \alpha u + \beta v + \gamma a\rangle = \langle v, w\rangle \\ \langle a, \alpha u + \beta v + \gamma a\rangle = \langle a, w\rangle \end{cases}.$$

Or $\langle u,v\rangle = \langle u,a\rangle = \langle v,a\rangle = 0$, alors
$$\begin{cases} \alpha\|u\|^2 &= \langle u,w\rangle \\ \beta\|v\|^2 &= \langle v,w\rangle \\ \gamma\|w\|^2 &= \langle a,w\rangle \end{cases},$$
d'où $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\beta = 0$ et $\gamma = \dfrac{2}{3}$. Ainsi les coordonnées de w dans la base (u,v,w) sont $\left(\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{2}{3}\right)$.

Partie II

1. On a $N(1) = 0$, donc 1 est une racine réelle de N et ensuite $X-1$ divise N. En effectuant la division euclidienne de N par $X-1$, on trouve $N = (X-1)(\underbrace{4X^2-2X+1}_{Q})$. Comme le polynôme Q est de degré deux, à coefficient réels et à discriminant strictement négatif, alors il n'a aucune racine réelle, mais il possède deux racines complexes conjuguées : α et $\bar{\alpha}$. Il en découle que 1 est la seule racine réelle de N.

2. α et $\bar{\alpha}$ sont les racines du polynôme $Q = 4x^2 - 2X + 1$, donc, en utilisant les relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme, on obtient
$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha\bar{\alpha} = \frac{1}{4}.$$

3. Montrons que la famille (L_1, L_2, L_3) est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. on a
$$\begin{aligned} aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0 \quad &\Longrightarrow \begin{cases} aL_1(1) + bL_2(1) + cL_3(1) &= 0 \\ aL_1(\alpha) + bL_2(\alpha) + cL_3(\alpha) &= 0 \\ aL_1(\bar{\alpha}) + bL_2(\bar{\alpha}) + cL_3(\bar{\alpha}) &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\alpha)^2 c &= 0 \\ (\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})b &= 0 \\ (\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)a = 0 &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = b = c = 0, \end{aligned}$$
d'où la liberté de la famille (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{C}_2[X]$ et, comme $\mathrm{Card}(L_1, L_2, L_3) = \dim \mathbb{C}_2[X] = 3$, alors la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

4. **(a)** Montrons que ψ est linéaire. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons Q_1 (resp. Q_2) le reste de la division euclidienne de P_1 (resp. P_2) par N et, comme $\psi(P_1)$ (resp. $\psi(P_1)$) est le reste de la division euclidienne de P_1 (resp. P_2) par N, alors
$$\begin{cases} P_1 = Q_1 N + \psi(P_1) \\ \deg \psi(P_1) < \deg N \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_2 = Q_1 N + \psi(P_2) \\ \deg \psi(P_2) < \deg N \end{cases},$$
donc
$$\begin{cases} \lambda P_1 + P_2 = (\lambda Q_1 + Q_2)N + (\lambda\psi(P_1) + \psi(P_2)) \\ \deg(\lambda\psi(P_1) + \psi(P_2)) \le \max(\deg \psi(P_1), \psi(P_2)) < \deg N \end{cases}.$$
Ceci implique que $\lambda\psi(P_1)+\psi(P_2)$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par N, c.à.d. $\psi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\psi(P_1) + \psi(P_2)$, d'où la linéarité de ψ.

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\begin{aligned} P \in \ker \psi &\iff \psi(P) = 0 \\ &\iff \text{ le reste de la division enclidienne de } P \text{ par } N \text{ est nul} \\ &\iff N \text{ divise } P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{C}[X] \ : \ P = NQ, \end{aligned}$$

donc $\ker \psi = \{NQ \ : \ Q \in \mathbb{C}[X]\}$. Comme $\ker \psi \neq \{0\}$, alors l'endomorphisme ψ n'est pas injectif.

(c) Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a, par définition de ψ, $\deg \psi(P) < \deg N = 3$, donc $\operatorname{Im} \psi \subset \mathbb{C}_2[X]$ et ensuite $\operatorname{Im} \psi \neq \mathbb{C}[X]$, du coup ψ n'est pas surjectif.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\deg \psi(X^n) < \deg N$ et $\deg N = 3$, donc $\psi(X^n) \in \mathbb{C}_2[X]$ et, comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ d'après la question **II.3**, alors il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\psi(X^n) = a_nL_1 + b_nL_2 + c_nL_3$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $X^n = QN + \psi(X^n)$, où Q est le quotient de la division euclidienne de X^n par N, donc, en vertu de la question précédente, on a

$$X^n = Q(X)N(X) + a_nL_1(X) + b_nL_2(X) + c_nL_3(X). \quad \spadesuit$$

- ► En évaluant l'égalité $\spadesuit$ en 1, on obtient $1 = c_n(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})$, donc, en vertu de la question **II.2**, on a

$$c_n = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})} = \frac{1}{1-(\alpha+\bar{\alpha})+\alpha\bar{\alpha}} = \frac{4}{3}.$$

- ► En évaluant l'égalité $\spadesuit$ en α, on obtient $\alpha^n = b_n(\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})$, donc $b_n = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})}$.
- ► En évaluant l'égalité $\spadesuit$ en $\bar{\alpha}$, on obtient $\bar{\alpha}^n = a_n(\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)$, donc $a_n = \dfrac{\bar{\alpha}^n}{(\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)}$.

(c) D'après $\spadesuit$ ci-dessus, on a

$$X^n = Q(X)N(X) + a_nL_1(X) + b_nL_2(X) + c_nL_3(X),$$

donc en évaluant en f, on obtient

$$f^n = Q(f)N(f) + a_nL_1(f) + b_nL_2(f) + c_nL_3(f),$$

et, comme par hypothèse $N(f) = 0$, il vient

$$f^n = a_nL_1(f) + b_nL_2(f) + c_nL_3(f).$$

(d) On $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{1}{4}$, donc $|\alpha| = \dfrac{1}{2}$, ainsi

$$|a_n| = \left|\frac{\bar{\alpha}^n}{(\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)}\right| = \frac{|\alpha|^n}{|\bar{\alpha}-1|\,|\bar{\alpha}-\alpha|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$|b_n| = \left|\frac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})}\right| = \frac{|\alpha|^n}{|\alpha-1|\,|\alpha-\bar{\alpha}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

finalement $a = b = 0$ et $c = \dfrac{4}{3}$.

6. (a) On a $a=b=0$ et $c=\dfrac{4}{3}$, donc $h=aL_1(f)+bL_2(f)+cL_3(f)=\dfrac{4}{3}L_3(f)$ et par ailleurs

$$L_3(X)=(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})=X^2-(\alpha+\bar{\alpha})X+\alpha\bar{\alpha}=X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{4},\qquad \text{(d'après la question } \mathbf{II.2}\text{)}$$

donc $h=\dfrac{4}{3}\left[f^2-\dfrac{1}{2}f+\dfrac{1}{4}\mathrm{id}_E\right]=\dfrac{1}{3}\left[4f^2-2f+\mathrm{id}_E\right]$.

(b) D'après la question précédente, on a $h=\dfrac{1}{3}\left[4f^2-2f+\mathrm{id}_E\right]=\dfrac{1}{3}P(f)$, avec $P=4X^2-2X+1$. En effectuant la division euclidienne de P^2 par N, on trouve $P^2(X)=(4X+2)N(X)+12X^2-6X+3$, donc, puisque N est un polynôme annulateur de f, on a

$$h^2=\frac{1}{9}P^2(f)=\frac{1}{9}\left[(4f+2\,\mathrm{Id}_E)N(f)+12f^2-6f+3\,\mathrm{Id}_E\right]=\frac{1}{3}\left[4f^2-2f+\mathrm{id}_E\right]=h,$$

ainsi h est une projection.

Problème 2

Partie I

Etude de quelques propriétés de l'application trace

1. (a) Soient $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}, B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $\lambda A+B=(\lambda a_{i,j}+b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, donc

$$\mathrm{Tr}(\lambda a+b)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{k,k}+b_{k,k})=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}+\sum_{k=1}^{n}b_{k,k}=\lambda\,\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B),$$

d'où la linéarité de Tr.

(b) Soient $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}, B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in E$. On a $AB=(c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $BA=(d_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ avec $c_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$ et $d_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}c_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i} \qquad \text{d'après le théorème de Fubini}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,k}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,i} \qquad \text{on a échangé les rôles des indices } i \text{ et } j\\
&= \sum_{i=1}^{n}d_{i,i}=\mathrm{Tr}(BA).
\end{aligned}$$

(c) D'après la question **I.1**, Tr est une forme linéaire sur E et, comme elle non nulle (car $\mathrm{Tr}(I_n)=n\neq 0$), alors $\ker\mathrm{Tr}$ est un hyperplan de E, ainsi $\dim\ker\mathrm{Tr}=\dim E-1=n^2-1$.

(d) Soit $M\in E$, on a

$$\begin{aligned}
M\in\ker\mathrm{Tr}\cap\mathrm{Vect}(I_n) &\iff M\in\mathrm{Vect}(I_n) \text{ et } M\in\ker\mathrm{Tr}\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}\ :\ M=\lambda I_n \text{ et } \mathrm{Tr}(M)=0\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}\ :\ M=\lambda I_n \text{ et } \mathrm{Tr}(\lambda I_n)=0\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}\ :\ M=\lambda I_n \text{ et } \lambda n=0\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}\ :\ M=\lambda I_n \text{ et } \lambda=0\\
&\iff M=0,
\end{aligned}$$

donc $\ker \mathrm{Tr} \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0\}$. Or $\dim \ker \mathrm{Tr} + \dim \mathrm{Vect}(I_n) = \dim E$, alors $E = \ker \mathrm{Tr} \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. (a) Soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque Tr est linéaire selon la question **I.1**, alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= (\lambda M + N) + \mathrm{Tr}(\lambda M + N) = (\lambda M + N) + (\lambda \,\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)) \\ &= \lambda(M + \mathrm{Tr}(M)) + (N + \mathrm{Tr}(N)) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N), \end{aligned}$$

donc φ est un endomorphisme de E.

Soient $M \in E$ et $\lambda = \mathrm{Tr}(M)$. On a

$$\begin{aligned} M \in \ker\varphi &\iff \varphi(M) = 0 \\ &\iff M + \lambda I_n = 0 \\ &\iff \begin{cases} M = -\lambda I_n \\ \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}\left(-\lambda I_n\right) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} M = -\lambda I_n \\ \lambda = -n\lambda \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} M = -\lambda I_n \\ \lambda = 0 \end{cases} \\ &\iff M = 0, \end{aligned}$$

donc $\ker\varphi = \{0\}$, dès lors φ est un endomorphisme injectif de E et, comme E est un espace vectoriel de dimension finie, alors φ est un automorphisme de E.

(b) i) Soit $M \in E$. On a

$$\begin{aligned} M \in E_1(\varphi) &\iff \varphi(M) = M \\ &\iff M + \mathrm{Tr}(M) I_n = M \\ &\iff \mathrm{Tr}(M) I_n = 0 \\ &\iff \mathrm{Tr}(M) = 0 \\ &\iff M \in \ker \mathrm{Tr}, \end{aligned}$$

donc $E_n(\varphi) = \ker \mathrm{Tr}$.

ii) Soit $M \in E$. Ona

$$\begin{aligned} M \in E_{n+1}(\varphi) &\iff \varphi(M) = (n+1)M \\ &\iff M + \mathrm{Tr}(M) I_n = M \\ &\iff M = \lambda I_n, \quad (\text{ avec } \lambda = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}) \end{aligned}$$

donc $E_{n+1}(\varphi) = \{\lambda I_n \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

iii) D'après la question **II.1.d**, on a $E = \ker \mathrm{Tr} \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$ et, comme $E_1(\varphi) = \ker \mathrm{Tr}$ et $E_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(I_n)$, alors $E = E_1(\varphi) \oplus E_{n+1}(\varphi)$, dès lors φ est diagonalisable.

3. (a) On a $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc $\phi^2 - 2\phi + \mathrm{Id}_E = (\phi - \mathrm{Id}_E)^2$, alors, pour tout $M \in E$, on a

$$\begin{aligned} (\psi^2 - 2\psi + \mathrm{Id}_E)(M) &= (\psi - \mathrm{Id}_E)^2(M) = (\psi - \mathrm{Id}_E)\mathrm{o}(\psi - \mathrm{Id}_E)(M) \\ &= (\psi - \mathrm{Id}_E)(\psi(M) - M) = (\psi - \mathrm{Id}_E)((M + \lambda J) - M) \quad (\text{ avec } \lambda = \mathrm{Tr}(M)) \\ &= (\psi - \mathrm{Id}_E)(\lambda J) = \lambda(\psi - \mathrm{Id}_E)(J) \\ &= \lambda(\psi(J) - J) = \lambda\left((J + \mathrm{Tr}(J)J - J\right) \\ &= 0, \quad (\text{ car } \ \mathrm{Tr}(J) = 0) \end{aligned}$$

du coup $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de ψ.

(b) On a $\psi(J) = J$ et $J \neq 0$, donc $1 \in \mathrm{Sp}(\psi)$. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\psi)$, alors il existe $M \in E \setminus \{0\}$ tel que $\psi(M) = \lambda M$, donc

$$\begin{aligned}(\psi^2 - 2\psi + \mathrm{Id}_E)(M) &= \psi(\psi(M)) - 2\psi(M) + M) \\ &= \psi(\lambda M) - 2\lambda M + M \\ &= \lambda^2 M - 2\lambda M + M = (\lambda - 1)^2 M\end{aligned}$$

et, comme $\psi^2 - 2\psi + \mathrm{Id}_E = 0$ d'après la question précédente, alors $(\lambda - 1)^2 M = 0$, dès lors $\lambda = 1$ puisque $M \neq 0$. On conclut que $\mathrm{Sp}(\psi) = \{1\}$.

(c) Supposons par l'absurde que ψ est diagonalisable, donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\psi)} E_\lambda(\psi)$ et, comme $\mathrm{Sp}(\psi) = \{1\}$, alors $E = E_1(\psi)$, c.à.d.

$$\forall M \in E, \ \ \psi(M) = M,$$

ce qui est absurde puisque $\psi(I_n) = I_n + nJ_n \neq I_n$. Ainsi ψ n'est pas diagonalisable.

Partie II
Un résultat préliminaire

1. • Pour tous $x, y \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$v(\lambda x + y) = u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) = \lambda v(x) + v(y),$$

donc v est linéaire.

• On a

$$\ker(v) = \{x \in F_1 \, : \, v(x) = 0\} = \{x \in F_1 \, : \, u(x) = 0\} = \{x \in F_1 \, : \, x \in \ker(u)\} = F_1 \cap \ker(u) = \{0\},$$

donc v est injective.

• Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $E = F_1 \oplus \ker(u)$, il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in \ker u$ tels que $x = x_1 + x_2$, par suite $y = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = v(x_1)$, d'où la surjectivité de v.

• Conclusion : v est un isomorphisme.

2. **(a)** Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_r\varepsilon_r = 0 &\iff \lambda_1 v(e_1) + \cdots + \lambda_r v(e_r) = 0 \\ &\iff \lambda_1 u(e_1) + \cdots \lambda_r u(e_r) = 0 \\ &\iff u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r) = 0 \\ &\iff \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in \ker(u) \\ &\iff \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_r e_r \in \ker(u) \cap F_1 \quad \text{car } (e_1, \ldots, e_r) \text{ est une base de } F_1 \\ &\iff \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_r e_r = 0 \quad \text{car } \ker(u) \cap F_1 = \{0\} \\ &\iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0, \quad \text{car } (e_1, \ldots, e_r) \text{ est une base de } F_1\end{aligned}$$

donc $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est une famille libre de G, qui est de dimension finie, alors, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter à une base de G, c.à.d. il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m)$ de G constituée de $m - r$ vecteurs telle que la famille $C = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m)$ soit une base de G.

(b) On a $u(e_1)=\varepsilon_1,\dots,u(e_r)=\varepsilon_r$ et $u(e_{r+1})=\cdots=u(e_p)=0$, donc

$$\mathrm{Mat}_{B,C}(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=J_{m,p,r}.$$

3. On pose $F=\mathbb{R}^p$ et $G=\mathbb{R}^m$, et on note B' la base canonique de F et C' la base canonique de G. Soient $M\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et u l'application linéaire canoniquement associée à la matrice M, c.à.d. l'unique application linéaire $u:F\longrightarrow G$ telle que $M=\mathrm{Mat}_{B',C'}(u)$.

Puisque $0<\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}(M)<\min(p,m)$, alors, d'après la question **II.2**, il existe une base B de F et une base C de G telles que $\mathrm{Mat}_{B,C}(u)=J_{m,p,r}$. Or $\mathrm{Mat}_{B',C'}(u)=P_{C'}^{C}\,\mathrm{Mat}_{B,C}(u)P_B^{B'}$, alors $M=SJ_{m,p,r}T^{-1}$ avec $S=P_{C'}^{C}$ et $T=P_{B'}^{B}$.

4. ▶ Si $0<r=p<m$, alors $J_{m,p,r}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix}$.

▶ Si $0<r=m<p$, alors $J_{m,p,r}=\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$.

▶ Si $0<r=m=p$, alors $J_{m,p,r}=I_m$.

Partie III
Un deuxième résultat préliminaire

1. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1l_1^*+\cdots+\lambda_sl_s^*=0 \quad&\iff\quad \forall j\in[\![1,s]\!],\ \left(\lambda_1l_1^*+\cdots+\lambda_jl_j^*+\cdots+\lambda_sl_s^*\right)(l_j)=0\\ &\iff\quad \forall j\in[\![1,s]\!],\ \lambda_1l_1^*(l_j)+\cdots+\lambda_jl_j^*(l_j)+\cdots+\lambda_sl_s^*(l_j)=0\\ &\iff\quad \forall j\in[\![1,s]\!],\ \lambda_j=0,\end{aligned}$$

donc la famille B^* est libre.

2. Soit $j\in[\![1,s]\!]$. On a

$$l_j^*(x)=l_j^*(x_1l_1+\cdots+x_jl_j+\cdots+x_sl_s)=x_1l_j^*(l_1)+\cdots+x_jl_j^*(l_j)+\cdots+x_sl_j^*(l_s)=x_j.$$

3. Soit $l^*\in L^*$. Pour tout $x=x_1l_1+\cdots+x_sl_s\in L$, on a

$$\begin{aligned}l^*(x)&=l^*(x_1l_1+\cdots+x_sl_s)\\ &=x_1l^*(l_1)+\cdots+x_sl^*(l_s)\\ &=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_sx_s\quad\text{avec } \lambda_i=l^*(l_i)\in\mathbb{R}\\ &=\lambda_1l_1^*(x)+\cdots+\lambda_sl_s^*(x)\quad\text{d'après la question } \mathbf{II.2}\\ &=\left(\lambda_1l_1^*+\cdots+\lambda_sl_s^*\right)(x),\end{aligned}$$

donc $l^*=\lambda_1l_1^*+\cdots+\lambda_sl_s^*$. Ainsi la famille B^* est génératrice de L^*.

4. D'après les questions **III.1** et **III.3** la famille B^* est à la fois libre et génératrice de L^*, donc c'est une base de L^*. Ainsi $\dim L^* = \text{Card}(B^*) = s = \dim L$.

Partie IV
Une caractérisation d'une forme linéaire sur E

1. Pour tous $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \phi_A(\lambda M + N) &= \text{Tr}(A(\lambda M + N)) = \text{Tr}(\lambda AM + AN) \\ &= \lambda \,\text{Tr}(AM) + \text{Tr}(AN) \quad \text{car Tr est linéaire d'après la question } \mathbf{I.1.a} \\ &= \lambda\phi_A(M) + \phi_A(N), \end{aligned}$$

donc ϕ_A est une forme linéaire sur E.

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ et

$$M \in \ker \phi_A \iff \phi_A(M) = 0 \iff \text{Tr}(AM) = 0 \iff a+b+c+d = 0$$

donc $\ker \phi_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \ : \ a+b+c+d = 0 \right\} = \text{Vect}(I, J, K)$, avec $I = E_{11} - E_{22}$, $J = E_{12} - E_{22}$ et $K = E_{21} - E_{22}$, d'où (I, J, K) est une famille génératrice de $\ker \phi_A$.

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} aI + bJ + cK = 0 &\iff a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & -(a+b+c) \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned},$$

donc la famille (I, J, k) est libre et par conséquent c'est une base $\ker \phi_A$.

(b) I est une matrice de $\ker \phi_A$ qui est inversible puisque $\det(I) = -1$.

3. (a) Soient $A, B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \forall M \in E, \ \ h(\lambda A + B)(M) &= \phi_{\lambda A + B}(M) = \text{Tr}((\lambda A + B)M) \\ &= \text{Tr}(\lambda AM + BM) = \lambda \,\text{Tr}(AM) + \text{Tr}(BM) \\ &= \lambda\phi_A(M) + \phi_B(M) = (\lambda\phi_A + \phi_B)(M) \\ &= (\lambda h(A) + h(B))(M), \end{aligned}$$

donc $h(\lambda A + B) = \lambda h(A) + h(B)$, d'où la linéarité de h.

(b) i) On a $AE_{ij} = (c_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$, avec

$$\forall k, l \in [\![1, n]\!], \ c_{kl} = \sum_{r=1}^{n} a_{kr}\delta_r^i \delta_l^j = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} a_{kr}\delta_r^i \delta_l^i + a_{ki}\delta_i^i \delta_l^j = a_{ki}\delta_l^j,$$

dès lors

$$\phi_A(E_{ij}) = \text{Tr}(AE_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_k^j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{ki}\delta_k^j + a_{ji}\delta_j^j = a_{ji}.$$

ii) Soient $A=(a_{kl})_{1\le k,l\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} A\in\ker h &\iff h(A)=0\\ &\iff \phi_A=0\\ &\iff \forall i,j\in[\![1,n]\!],\ \phi_A(E_{ij})=0\\ &\iff \forall i,j\in[\![1,n]\!],\ a_{ji}=0 \quad \text{d'après la question précédente}\\ &\iff A=0, \end{aligned}$$

donc h est injective.

(c) D'après les questions **IV.3.a** et **IV.3.b.ii** l'application $h:E\longrightarrow E^*$ est linéaire et injective et, comme $\dim E=\dim E^*$ selon la question **III.3**, alors h est un isomorphisme.

Partie V
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

1. Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas H. Montrons que $E=H\oplus\operatorname{Vect}(A)$.
Soit $M\in H\cap\operatorname{Vect}(A)$, donc $M\in H$ et $M\in\operatorname{Vect}(A)$, d'où il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $M=\lambda A$. Si $\lambda\neq0$, on aurait $A=\dfrac{1}{\lambda}M\in H$ puisque $M\in H$, ce qui contredirait le fait que $A\notin H$, du coup $\lambda=0$ et $M=0$. Ainsi $H\cap\operatorname{Vect}(A)=\{0\}$ et, comme $\dim H+\dim\operatorname{Vect}(A)=(\dim E-1)+1=\dim E$, alors $E=H\oplus\operatorname{Vect}(A)$.

2. H est un hyperplan de E, donc, il existe $l\in E^*$ tel que $H=\ker l$. D'après la question **IV.3.c** l'application $h:E\longrightarrow E^*$ est un isomorphisme , dès lors il existe $B\in E$ tel que $l=h(B)=\phi_B$. Finalement $H=\ker\phi_B$.

3. **(a)** En développant le determinant de la matrice P_1 par rapport à la première ligne, on obtient
$\det P_1=(-1)^{n+1}\det I_{n-1}=(-1)^{n+1}\neq0$, du coup P_1 est une matrice inversible.

(b) On a $R_r=J_{n,n,r}=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$ et décomposons P_1 en 4 blocs $P_{11},P_{12},P_{21},P_{22}$ de mêmes tailles que les blocs de R_r : $P_1=\left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12}\\ \hline P_{21} & P_{22}\end{array}\right)$, donc

$$R_rP_1=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12}\\ \hline P_{21} & P_{22}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

dès lors $\phi_{R_r}(P_1)=\operatorname{Tr}(R_rP_1)=0$ et par suite $P_1\in\ker\phi_{R_r}$.

4. Soit H un hyperplan de E. D'après la question **V.2**, il existe une matrice $B\in E$ tlle que $H=\ker\phi_B$. Notons $r=\operatorname{rg}(B)$, si $r=0$, on aurait $B=0$ puis $\phi_B=0$ et $H=\ker\phi_B=E$, ce qui contredirait le fait que H est un hyperplan de E, du coup $0<r\le n$. Maintenant, on va distinguer deux cas :

- Premier cas : $0 < r < n$.

  Puisque $0 < r < n$, alors, d'après la question **II.3**, il existe deux matrices inversibles $S, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = SJ_{n,n,r}T^{-1} = SR_rT^{-1}$ ou encore $R_r = S^{-1}BT$ $(\star)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \phi_{R_1}(P_1) &= \operatorname{Tr}(R_rP_1) \\ &= \operatorname{Tr}(S^{-1}BTP_1) \quad \text{d'après } (\star) \text{ ci-dessus} \\ &= \operatorname{Tr}(B(S^{-1}TP_1)) \quad \text{d'après la quesyion } \mathbf{I.1.a} \\ &= \phi_B(S^{-1}TP_1), \end{aligned}$$

  or, d'après la question **V.3.b**, on a $\phi_{R_1}(P_1) = 0$, alors $\phi_B(S^{-1}TP_1) = 0$, par conséquent la matrice inversible $S^{-1}TP_1$ appartient à $H = \ker \phi_B$.

- Deuxième cas : $r = n$.

  Puisque $\operatorname{rg}(B) = n$, alors B est inversible, donc

$$0 = \operatorname{Tr}(P_1) = \operatorname{Tr}(B(B^{-1}P_1)) = \phi_B(B^{-1}P_1),$$

  par conséquent la matrice inversible P_1B^{-1} appartient $H = \ker \phi_B$.

Conclusion : Dans les deux cas il existe une matrice inversible qui appartient à H.