المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche
Scientifique de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure des Mines de Rabat

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2016

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Filière **PSI**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Problème 1

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $n \geq 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note Id_E l'endomorphisme identité de E. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E, non réduit au seul vecteur nul. On suppose que F et G sont supplémentaires dans E, et on écrit $E = F \oplus G$. On appelle projection de E sur F parallèlement à G, l'application p définie sur E, comme suit, pour tout x de E tel que $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, $p(x) = x_1$. Soient u_1,u_2 deux éléments de E, on note $\mathrm{Vect}(u_1)$ (resp. $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$) le sous espace vectoriel de E engendré par u_1 (resp. u_1 et u_2).

Partie I

1. Soit p un endomorphisme de E, montrer que p est une projection de E sur F parallèlement à G, si et seulement si, $p \circ p = p$, et dans ce cas $F = \mathrm{Im}\, p$ et $G = \ker p$.

2. On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que g est une projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G, dont on précisera les vecteurs u, v et w tels que $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$.

b) Montrer que g est diagonalisable.

c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice diaqonale D, telles que $A = PDP^{-1}$.

3. On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire euclidien canonique noté $\langle\, , \rangle$ et la norme associée sera notée $\|.\|$. Soit K un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on rappelle que la projection notée p_K sur K parallèlement à $K^\perp$ est appelée la projection orthogonale sur K.

i) Déterminer $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\mathbb{R}^3 = F \oplus D$, avec $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $a \in F^\perp$.

ii) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $p_D(x) = \frac{\langle a,x\rangle}{\|a\|^2} a$.

iii) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $p_F(x) = x - \frac{\langle a,x\rangle}{\|a\|^2} a$.

iv) En déduire les coordonnées de w dans la base (u, v, a).

Partie II

Dans cette partie, on prend E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de dimension finie n, $n \geq 2$. Pour tout entier naturel m, $\mathbb{C}_m[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à m.

On désigne par N le polynôme de $\mathbb{C}_m[X]$ défini par $N(X) = 4X^3 - 6X^2 + 3X - 1$ et soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $N(f) = 0$.

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de N. Posons α et $\bar{\alpha}$ les deux autres racines non réelles et conjuguées.

2. Calculer $\alpha + \bar{\alpha}$ et $\alpha\bar{\alpha}$.

3. On note L_1, L_2, L_3, les polynômes définis par :

$$L_1(X) = (X-1)(X-\alpha), \quad L_2(X) = (X-1)(X-\bar{\alpha}), \quad L_3(X) = (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}).$$

Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

4. On désigne par ψ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de P par N.

a) Montrer que ψ est un endomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$.

b) Déterminer $\ker\psi$. Est-ce que ψ est injective ? Justifier la réponse.

c) ψ est-elle surjective ? Justifier la réponse.

5. **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) de $\mathbb{C}^3$, tel que $\psi(X^n) = a_nL_1 + b_nL_2 + c_nL_3$.

b) Vérifier que $c_n = \frac{4}{3}$ et exprimer a_n, b_n en fonction de α, $\bar{\alpha}$, n.

c) Prouver que, pour tout entier naturel n, $f^n = a_nL_1(f) + b_nL_2(f) + c_nL_3(f)$.

d) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers des réels respectifs notés a et b.

6. On considère l'application suivante $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

(a) Montrer que $h = \frac{1}{3}(4f^2 - 2f + Id_E)$.

(b) Vérifier que h est une projection.

Problème 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et on note par $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E, (une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$). On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel supplémentaire à une droite vectorielle dans E. La matrice transposée de M est notée ${}^tM$. Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on note $[\![1, s]\!] = \{1, \ldots, n\}$. On définit l'application trace, notée Tr, de E vers $\mathbb{R}$ comme suit, pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, $Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.

L'objet du problème est de montrer que tout hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible.

Partie I
Étude de quelques propriétés de l'application trace

1. **a)** Montrer que Tr est une forme linéaire.

b) Montrer que pour tous éléments A et B de E, $\quad Tr(AB) = Tr(BA)$.

c) Déterminer la dimension de $\ker Tr$.

d) Montrer que $E = \ker Tr \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. Soit φ l'application qui, à toute matrice M de E associe $\varphi(M) = M + Tr(M)I_n$.

a) Montrer que φ est un automorphisme de E.

b) i) Déterminer $E_1(\varphi) = \{M \in E;\ \varphi(M) = M\}$.

ii) Montrer que $E_{n+1}(\varphi) = \{M \in E;\ \varphi(M) = (n+1)M\} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

iii) En déduire que φ est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de φ.

3. Soit J une matrice non nulle de E dont la trace est nulle. On considère ψ l'endomorphisme de E qui, à toute matrice M de E associe $\psi(M) = M + Tr(M)J$.

a) Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de ψ.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de ψ.

c) ψ est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

Partie II
Un premier résultat préliminaire

Soient F et G deux espaces vectoriels de dimensions respectivement finies $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit u une application linéaire de F vers G, de rang r tel que $r \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à m lignes et p colonnes.

1. Soit F_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans F, on considère l'application $v : F_1 \to Im(u)$ telle que $x \mapsto v(x) = u(x)$. Montrer que v est un isomorphisme.

2. On suppose que $0 < r < \min(p, m)$ et on note $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, telle que $(e_1, \ldots, e_r)$ soit une base de F_1 et $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ une base de $\ker u$. On pose, pour tout entier naturel $i \in [\![1, r]\!]$, $\varepsilon_i = v(e_i)$.

a) Montrer qu'il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m)$ de vecteurs de G, telle que la famille $C = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ soit une base de G.

b) Déterminer $Mat_{B,C}(u)$, la matrice de u relativement aux bases B et C.

3. En déduire que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, si $0 < r = rg(M) < \min(m, p)$, alors il existe deux matrices inversibles S et T respectivement de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $M = SJ_{m,p,r}T^{-1}$, avec $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et I_r la matrice identité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

4. Quelle est la forme de la matrice $J_{m,p,r}$, dans chaque cas suivant, $(0 < r = p < m)$, $(0 < r = m < p)$, $(0 < r = m = p)$? Justifier la réponse.

Partie III
Un deuxième résultat préliminaire

Soit L un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $s (s \in \mathbb{N}^*)$. Notons $L^* = \mathcal{L}(L, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires de L. Soit $B = (l_1, \ldots, l_s)$ une base de L. On note, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, l_i^* la forme linéaire sur L définie de la façon suivante, pour tout entier $j \in [\![1, s]\!]$, $l_i^*(l_j) = \delta_i^j$, où $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, le symbole de Kronecker.

1. Montrer que $B^* = (l_1^*, \dots, l_s^*)$ est une famille libre de L^*.

2. Soit $x \in L$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i l_i$, montrer que, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $l_j^*(x) = x_j$.

3. En déduire que B^* est une famille génératrice de L^*.

4. En déduire la dimension de L^*.

Partie IV
Une caractérisation d'une forme linéaire sur E

Soit A une matrice de E, on définit l'application ϕ_A de E vers $\mathbb{R}$, de la façon suivante, pour tout M de E, $\phi_A(M) = Tr(AM)$.

1. Vérifier que ϕ_A est une forme linéaire sur E.

2. Comme cas particulier, seulement dans cette question, on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une base de $\ker(\phi_A)$.

   (b) Vérifier que $\ker(\phi_A)$ contient au moins une matrice inversible.

3. Soit h l'application définie de E vers E^* par $A \mapsto h(A) = \phi_A$.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, une matrice élémentaire $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme suit, pour tout couple d'entiers $(k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, $e_{k,l} = \delta_k^i \delta_l^j$, ($\delta_k^i$ (resp. δ_l^j) est le symbole de Kronecker qui est défini dans la partie III).

   a) Vérifier que h est une application linéaire.

   b) i) On pose $A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, calculer $\phi_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de la matrice de A.

   ii) En déduire que h est injective.

   c) En déduire que h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie V
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

Soit H un hyperplan de E.

1. Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H, on a
$E = H \oplus \text{Vect}(A)$.

2. Montrer qu'il existe une matrice B de E telle que $H = \ker(\phi_B)$.

3. On note $r = rg(B)$ et on considère la matrice de E, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Montrer que P_1 est une matrice inversible.

   b) On suppose que $0 < r < n$ et on note $R_r = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $\begin{cases} r_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ r_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Montrer que P_1 appartient à $\ker(\phi_{R_r})$.

4. En déduire que tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

FIN DE L'ÉPREUVE