L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux, à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice

Recherche de sous-espaces stables par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notera I_3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.

1.1. Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M et en déduire ses valeurs propres.

1.2. Justifier que la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.3. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice M et préciser leurs dimensions.

1.4. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

1.5. Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f.

1.6. Recherche des plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f

1.6.1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f.

1.6.2. On note V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u_1 et u_2, avec $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$. Montrer que V est un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f.

1.6.3. Soit W un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f ; on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ induit par f sur W.

(i) Montrer que $\chi_g = (X-1)^2$ ou $\chi_g = (X-1)(X-2)$; χ_g étant le polynôme caractéristique de g.
(ii) Si $\chi_g = (X-1)^2$, montrer que $W = \mathrm{Ker}\,(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$.
(iii) Si $\chi_g = (X-1)(X-2)$, montrer que $W = V$.

Problème 1

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se notera I_p.

Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}\,(M)$ sa trace, ${}^tM$ sa transposée, χ_M son polynôme caractéristique ; on rappelle que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_M(\lambda) = \det(\lambda\, I_p - M).$$

1ère Partie
Réduction d'une matrice

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$, et soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On pose $\beta = a - b$, $\gamma = a + (n-1)b$ et on note A, D les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

2.1. Préciser le rang de la matrice $A - \beta I_n$.

2.2. En déduire que β est une valeur propre de la matrice A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

2.3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPDP$.

2.4. Calculer le déterminant de la matrice A. À quelle condition, sur a et b, la matrice A est-elle inversible ?

2.5. Calculer le produit $(A - \beta\, I_n)(A - \gamma\, I_n)$ puis en déduire une méthode de calcul de l'inverse de la matrice A, si elle est inversible, en fonction des matrices A et I_n.

2.6. On suppose de plus que les réels β et γ sont positifs ou nuls. Donner une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles, telle que $A = S^2$.
On pourra chercher S sous la forme $S = {}^tP\Delta P$ avec Δ diagonale.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une famille de vecteurs d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$; la norme euclidienne sur E associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

3.1. On suppose qu'il existe une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs **unitaires** de E et un réel α, non nul et distinct de 1, tels que, pour tout $i \neq j$, $(u_i|u_j) = \alpha$. On note G la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $(u_i|u_j)$, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$.

3.1.1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1[$.

3.1.2. Justifier que la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ est liée.

3.1.3. Montrer que les colonnes de G sont liées et en déduire que la matrice G n'est pas inversible.

3.1.4. En appliquant les résultats de la partie précédente à la matrice G, déterminer la valeur de α en fonction de n.

3.2. Étude de la réciproque

On pose $c = -\frac{1}{n}$ et on note M la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par : $M = \begin{pmatrix} 1 & c & \dots & c \\ c & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ c & \dots & c & 1 \end{pmatrix}$; on désigne par $<\ ,\ >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.2.1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $M = B^2$.

Dans la suite, une telle matrice B est choisie et on pose $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$, $B = \left(b_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$.

3.2.2. Pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$, exprimer $m_{i,j}$ en fonction des coefficients de la matrice B.

3.2.3. Moyennant le résultat de la question précédente, construire une famille $(w_1, \dots, w_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall\, (i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \quad < w_i, w_j >= m_{i,j}.$$

3.2.4. Montrer que la matrice M n'est pas inversible et en déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{n+1}$, de dimension n et contenant tous les vecteurs $w_1, \dots, w_{n+1}$.

3.2.5. Montrer qu'il existe effectivement une famille $(v_1, \dots, v_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs **unitaires** de E tels que, pour tout $i \neq j$, $(v_i|v_j) = -\frac{1}{n}$.

On pourra construire une isométrie entre E et l'espace euclidien F, muni de la structure euclidienne induite par celle de $\left(\mathbb{R}^{n+1}, <\ ,\ >\right)$.

Problème 2
Décompositions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en somme directe de deux sous-espaces vectoriels stables par les endomorphismes φ_M

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes ; la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est notée I_2.

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $[M,N] = MN - NM$ et on note φ_M l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ défini par

$$\varphi_M(X) = [M,X] = MX - XM, \quad X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le but du problème est de déterminer toutes les décompositions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en somme directe de deux sous-espaces vectoriels non nuls et stables par tous les endomorphismes φ_M.

1ère Partie
Construction de deux sous-espaces non nuls, supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et stables par tous les endomorphismes φ_M

4.1. Calculer les matrice $[A,B]$, $[C,A]$ et $[C,B]$.

4.2. Montrer que la famille (I_2, A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4.3. Soit $M = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; λ, α, β et γ étant des complexes.

4.3.1. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ déterminer $\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \; ; MN = NM\}$.

4.3.2. Si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ montrer que $\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \; ; MN = NM\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par la famille (I_2, M). Quelle est sa dimension ?

4.4. Dans la suite on note $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par la famille (A,B,C), et $\mathbb{C}.I_2$ celui engendré par la matrice I_2 : $\mathbb{C}.I_2 = \{\lambda.I_2 \; ; \lambda \in \mathbb{C}\}$.

4.4.1. Déterminer la dimension de $\mathscr{F}$.

4.4.2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{F}$ et $\mathbb{C}.I_2$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4.4.3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{F}$ et $\mathbb{C}.I_2$ sont stables par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2ème Partie
$\mathscr{F}$ et $\mathbb{C}.I_2$ sont les seuls possibles

5.1. Calculer $\varphi_B(A)$ en fonction de C et $\varphi_B(C)$ en fonction de B .

5.2. Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ **stable** par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\mathscr{V}$ contient un élément $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C$, avec $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$; λ, α, β et γ étant des complexes.

5.2.1. Si $\gamma \neq 0$.

(i) Calculer $\varphi_C \circ \varphi_A(X)$ et en déduire que $A \in \mathscr{V}$.

(ii) Justifier que B et C sont éléments de $\mathscr{V}$.

(iii) En déduire que $\mathscr{F} \subset \mathscr{V}$.

5.2.2. Envisager les cas restants et montrer que $\mathscr{F} \subset \mathscr{V}$.

5.3. Soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces vectoriels **non nuls et supplémentaires** dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont **stables** par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5.3.1. On suppose qu'il existe $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathscr{V}$, avec $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$; λ, α, β et γ étant des complexes. Montrer que $\mathscr{V} = \mathscr{F}$ et $\mathscr{W} = \mathbb{C}.I_2$

5.3.2. Dans le cas contraire montrer que $\mathscr{V} = \mathbb{C}.I_2$ et $\mathscr{W} = \mathscr{F}$.

FIN DE L'ÉPREUVE