3.2 Corrigé de l'épreuve:Math II-2019

1.1 **Un premier exemple:**

1.1.1 A étant une matrice de taille 2, alors le polynôme caractéristique de son endomorphisme canoniquement associé est:

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A) = X^2 - 2X = X(X-2).$$

Les valeurs propres de u sont ainsi $\lambda_1 = 0$ et $lambda_2 = 2$.
A possède deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, alors elle est diagonaliable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

• $(x,y) \in E_0(u) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \iff y = -x \iff (x,y) = x(1,-1)$.

Donc, $e_1 = (1,-1)$.

• $(x,y) \in E_2(u) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases} \iff y = x \iff (x,y) = x(1,1)$.

Donc, $e_2 = (1,1)$.

1.1.3 $\det(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, alors (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de u dans cette base et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.4 Nous avons $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
A est semblable à la matrice diagonale D de coefficients diagonaux 0 et $2 = Tr(A)$, alors A vérifie bien la propriété $\mathscr{P}$.

1.2 **Un deuxième exemple:**

1.2.1

$$\begin{aligned} \chi_B &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \quad \text{On développe par rapport à la } 3^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ &= (X-2)[(X-3)(X-1)-1] - 2(1-X+1) \\ &= (X-2)(X^2-4X+3-1+2) \\ &= (X-2)^3. \end{aligned}$$

On conclut que 2 est l'unique valeur propre de B.

1.2.2 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(v - 2id_{\mathbb{R}^3}) &\iff (B - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-y+z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z \\ x = 0 \\ z = -x \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = (0,1,-1). \end{aligned}$$

Ainsi, $Ker(v - 2id_{\mathbb{R}^3}) = Vect((0,1,-1))$.

1.2.3 La matrice B possède une unique valeur propre et ce n'est pas une matrice scalaire, alors elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Le polynôme caractéristique de B est scindé dans $\mathbb{R}$, alors B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.2.4 (i) description Les matrices des coordonnées de $v(e_1)$ et $v^2(e_1)$ sont définies respectivement par $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, et $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\\-4\end{pmatrix}$.
Alors, $v(e_1) = (3,1,2)$ et $v^2(1,0,0) = (8,6,10)$.
Nous avons, $\det(e_1, v(e_1), v^2(e_1)) = \begin{vmatrix}1&3&8\\0&1&6\\0&2&10\end{vmatrix} = -2 \neq 0$ alors $(e_1, v(e_1), v(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) $B^3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\24\\36\end{pmatrix}$ implique $v^3(e_1) = (4,24,36)$.
Cherchons a, b et c tels que $v^3(e_1) = ae_1 + bv(e_1) + cv^3(e_1)$. Cela est équivalent à:

$$\begin{cases} a+3b+8c=4\\ b+6c=24\\ 2b+10c=36\end{cases} \iff \begin{cases} a+3b+8c=4\\ b+6c=24\\ 2c=12 \quad eq_3 \longleftarrow 2eq_2 - eq_3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=-8\\ b=-12\\ c=6\end{cases}$$

En conséquence, $v^3(e_1) = -8e_1 - 12v(e_1) + 6v^2(e_1)$, et $B^{'} = \begin{pmatrix}0&0&-8\\1&0&-12\\0&1&6\end{pmatrix}$.

(iii) D'après ce qui précède: $B = PB^{'}P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix}1&3&8\\0&1&6\\0&2&10\end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de la base canonique vers la base $\mathscr{C}$. B est bien semblable à $B^{'}$ dont les coefficients diagonaux sont $0, 0, Tr(B)$; donc elle vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2.1 Une caractérisation des homothéties

2.1.1 Soit $x \in E \setminus \{0\}$. La famille $(x, f(x))$ est liée, alors il existe $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0$.
Si $\beta = 0$ alors $\alpha \neq 0$ et ensuite $x = 0$ (Absurde). Donc $\beta \neq 0$ et ensuite $f(x) = \dfrac{\alpha}{\beta}x$; soit $\lambda_x = \dfrac{\alpha}{\beta}x$. Quant à l'unicit'e on suppose qu'il existe $\lambda_x^{'}$ tel que $f(x) = \lambda_x^{'}.x$, alors $\lambda_x^{'}.x = \lambda_x.x$ et comme $x \neq 0$ on aura $\lambda_x = \lambda_x^{'}$.

2.1.2 (x, y) lié signifie que x et y sont colinéaires, c'est à dire il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$. Soit par exemple $x = \alpha y$:
La composition par f nous fera, $\lambda_x x = \lambda_y \alpha y$ ensuite $\lambda_x x = \lambda_y x$, et par unicité $\lambda_y = \lambda_x$.

2.1.3 On introduit dans ce cas de liberté le vecteur $x+y$. En revanche, on a $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ et d'autre part $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$; ainsi $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$ et donc par liberté on aura $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

2.1.4 D'aprés ce qui précède la fonction $x \longmapsto \lambda_x$ est une constante sur $E \setminus \{0\}$ $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc:
Pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$ (i.e. Homothétie de rapport λ); le cas $x = 0$ est trivialement vérifé.

2.2 Application à l'étude de la propriété $\mathscr{P}$ dans le cas $n = 2$.

2.2.1 A n'est pas une matrice scalaire indique que u n'est pas une homothétie; d'après la question (2.1), il existe un vecteur $e \in \mathbb{R}^2$ tel que $(e, u(e))$ est libre, et comme le cardinal de cette famille est égal à $2 = \dim(\mathbb{C}^2)$, elle forme une base de $\mathbb{C}^2$.

2.2.2 la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}$, où a et b sont des complexes donnés.
Par ailleurs, le déterminant (resp. la trace)de u est celui de sa matrice dans une base donnée, alors $\det(u) = -a$ (resp.$Tr(u) = b$).En conséquence, nôtre matrice en question est $\begin{pmatrix}0&-\det(u)\\1&\mathrm{Tr}(u)\end{pmatrix}$.

2.2.3 A et $\begin{pmatrix}0&-\det(u)\\1&\mathrm{Tr}(u)\end{pmatrix}$ sont associées au même endomorphisme dans deux bases, alors elles sont semblables, et en conclusion toute matrice qui n'est pas scalaire dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

3.1 **Quelques résultats utiles:**

3.1.1 Dáprès le cours, $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

3.1.2 λ_1, λ_2 et λ_3 sont les racines de χ_A comptées avec leur ordre de multiplicité, et comme χ_A est unitaire on a:

$$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) = X^3 - \left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\right)X^2 + \sigma_2(A)X - \prod_{i=1}^{3}\lambda_i = X^3 - \mathrm{Tr}(A)X^2 + \sigma_2(A)X - \det(A).$$

3.2 **Cas où les 3 valeurs propres de A sont deux à deux distinctes:**

3.2.1 e_1, e_2 et e_3 sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors $\mathscr{B}$ est libre; en plus elle est de cardinal $3 = \dim(E)$, donc c'est une base de E.
E possède une base formée de vecteurs propres de u, alors ce dernier est diagonalisable sur E.

3.2.2 $u(e) = u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, et $u^2(e) = \lambda_1^2 e_1 + \lambda_2^2 e_2 + \lambda_3^2 e_3$.
Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_1 e + \alpha_2 u(e) + \alpha_3 u^2(e) = 0$, alors:

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2\lambda_1 + \alpha_3\lambda_1^2\right)e_1 + \left(\alpha_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_2^2\right)e_2 + \left(\alpha_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3^2\right) = 0.$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2\lambda_1 + \alpha_3\lambda_1^2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_2^2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3^2 = 0 \end{cases}$$

Donc, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont solution du système de Vandermonde associé aux scalaires deux à deux distincts $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Ce qui termine de montrer que $\mathscr{C}$ est libre dans E qui est de dimension $3 = card(\mathscr{C})$, donc c'est une base de E.

3.2.3 La famille (e_1, e_2, e_3) est libre, alors:

$$u^3(e) - Tr(A)u^2(e) + \sigma(A)u(e) - \det(A)e = 0 \iff \forall i = 1,2,3: \quad \lambda_i^3 - Tr(A)\lambda_i^2 + \sigma(A)\lambda_i - \det(A) = 0.$$

Nous avons pour tout $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} Tr(A)\lambda_i^2 - \sigma_2(A)\lambda_i + \det(A) &= \lambda_i^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_i^3 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3.2.4 On a: $A^{'} = Mat_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \det(A) \\ 1 & 0 & -\sigma_2(A) \\ 0 & 1 & Tr(A) \end{pmatrix}$.
A et $A^{'}$ sont les matrices de u dans deux bases de E, alors elle sont semblables.
La diagonale de $A^{'}$ est $0, 0, Tr(A)$ alors A vérifie bien la propriété $\mathscr{P}$.

3.3 **Cas où A possède une valeur propre double et une valeur propre simple:**

3.3.1 μ est la valeur propre simple de u, alors la dimension du sous espace propre associé $Ker(u - \mu Id_E)$ vaut 1.
La valeur propre λ est double, alors les valeurs possibles de la dimension du sous espace propre associé $Ker(u - \lambda Id_E)$ sont 1 ou 2.

3.3.2 Soit $x \in E$, on a:

$$\begin{aligned} x \in Ker(u-\mu Id_E) \cap Ker(u - \lambda Id_E)^2 &\implies u(x) = \mu x \text{ et } u^2(x) - 2\lambda u(x) + \lambda^2 x = 0 \text{ (On a développé au moyen du b} \\ &\implies u(x) = \mu x \text{ et } (\mu^2 - 2\lambda\mu + \lambda^2)x = (\lambda-\mu)^2 = 0 \\ &\implies x = 0 \text{ (Car } \lambda \neq \mu). \end{aligned}$$

en conséquence, $Ker(u - \mu Id_E) \cap Ker(u - \lambda Id_E)^2 = \{0\}$.
D'après ce résultat, les sous espaces $Ker(u - \mu Id_E)$ et $Ker(u - \lambda Id_E)^2$ sont en somme directe, alors $\dim(Ker(u - \mu Id_E)) + \dim(u - \lambda Id_E)^2 \leq \dim(E) \leq 3$.
Donc, $1 + \dim(u - \lambda Id_E)^2 \leq 3$ ou encore $\dim(u - \lambda Id_E)^2 \leq 2$.

3.3.3 Il suffit de voir que $(u-\lambda Id_E)^2(u-\mu Id_E) = (u-\mu Id_E)(u-\lambda Id_E)^2 = 0$.
Soit $y \in Im(u-\mu Id_E)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u-\mu Id_E)(x)$,
d'où $(u-\lambda Id_E)^2(y) = (u-\lambda Id_E)^2(u-\mu Id_E)(x) = 0$; ensuite $y \in Ker(u-\lambda Id_E)^2$.
Ce qui prouve que, $Im(u-\mu Id_E) \subset Ker(u-\lambda Id_E)^2$.

3.3.4 D'après le thórème du rang $\dim Im(u-\mu Id_E) = 2$, alors d'après l'inclusion ci dessus $\dim Ker(u-\lambda Id_E)^2 \geq 2$.
De $(3.3.2)$, on conclut que $\dim Ker(u-\lambda Id_E)^2 = 2$.

3.3.5 **Cas où u est non diagonalisable:**

(i) u étant diagonalisable sur E, alors chaque sous espace propre est de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée; ainsi $\dim K(u-\lambda Id_E) = m_\lambda = 2$.

(ii) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha e + \beta u(e) = 0$, alors:

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \alpha e_2 + \beta\mu e_1 + \beta\lambda e_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha + \beta\mu = 0, \quad \alpha + \beta\lambda = 0 \;\; \text{Car} \;\; (e_1, e_2) \text{ est libre.} \\ &\Longrightarrow \quad \beta\mu = \beta\lambda, \quad \alpha + \beta\mu = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \beta = 0 \ (\lambda \neq \mu), \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $(e, u(e))$ est libre.
On peut remarquer facilement que e et $u(e)$ sont des vecteurs de $Vect(e_1, e_2)$.
D'autre part, u est diagonalisable, alors (e_1, e_2, e_3) est libre (Comme base de vecteurs propres de u), alors $e_3 \notin Vect(e_1, e_2)$ et ensuite $e_3 \notin Vect(e, u(e))$; comme on a en plus $(e, u(e))$ est libre on déduit que $(e, u(e), e_3)$ est libre dans E, son cardinal vaut $3 = \dim(E)$ alors elle en forme une base.

(iii) On a, $u(u(e)) = u(\mu e_1 + \lambda e_2) = \mu^2 e_1 + \lambda^2 e_2 = -\lambda\mu(e_1 + e_2) + (\lambda+\mu)(\mu e_1 + \lambda e_2) = -\lambda\mu e + (\lambda+\mu)u(e)$, et $u(e_3) = \lambda e_3$.
Donc la matrice A' a la forme proposée dans la question.

(iv) Calcul matriciel élémentaire. La matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est inversible, puisque son déterminant vaut $\lambda^2 \neq 0$ (car $\mu = 0$ et $\lambda \neq \mu$), alors en déplacant cette matrice inversible vers l'autre coté de l'égalité, on conclut que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 0 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$; cette matrice a pour coefficients diagonaux $0, 0$ et $2\lambda = \mu + \lambda + \lambda = Tr(A)$, donc A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

(v) μ étant non nul, alors la matrice $\begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas scalaire; d'après la partie 2, elle est semblable à une matrice de coefficients diagonaux $0, \mu + 2\lambda$, c'est à dire il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\begin{pmatrix} 0 & v' \\ w' & \mu + 2\lambda \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{avec} \quad (v', w') \in \mathbb{C}^2.$$

Par application du produit par blocs matriciels, on a:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & Q \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\lambda\mu & 0 \\ \hline 1 & \lambda+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & Q^{-1} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & v' \\ d & w' & \mu + 2\lambda \end{pmatrix} \quad \text{où} a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

D'après la question (iv) et l'opération matricielle ci dessus, on conclut que A est semblable cette dernière matrice dont les coefficients diagonaux sont $0, 0$ et $Tr(A) = \mu + 2\lambda$.
A vérifie ainsi la propriété $\mathscr{P}$.

3.3.6 **Cas où un' est pas diagonalisable:**

(i) On a $Ker(u-\lambda Id_E) \subset Ker(u-Id_E)^2$, en plus A n'est pas diagonalisable implique $\dim Ker(u-\lambda Id_E) < 2$ et $\dim Ker(u-Id_E)^2 = 2$, alors $Ker(u-Id_E) \subsetneq Ker(u-Id_E)^2$.

(ii) $e_2 \notin Ker(u-\lambda Id_E)$ c'est à dire e_2 n'est pas un vecteur propre de u, et ensuite $u(e_2)$ n'est pas colinéaire avec e_2, d'où $(e_2, u(e_2))$ est libre.
Si $(e_1, e_2, u(e_2))$ est liée, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $e_1 = \alpha e_2 + \beta u(e_2)$. alors $e_2 \in vect(e_2, u(e_2))$; comme c'est une famille libre dans $Ker(u-\lambda Id_E)^2$ qui est de dimension 2, alors $vect(e_2, u(e_2)) = Ker(u-\lambda Id_E)^2$.
Ensuite, $e_1 \in Ker(u-\lambda Id_E)^2$ et donc $u^2(e_1) - 2\lambda u(e_1) + \lambda^2 e_1 = 0$.

C'est à dire, $(\mu^2 - 2\mu\lambda + \lambda^1)e_1 = 0$, comme $e_1 \neq 0$ on aura : $(\mu - \lambda)^2 = 0$ et donc $\lambda = \mu$ (Absurde).
En conséquence, la famille $(e_1, e_2, u(e_2))$ est libre dans E de dimension 3 égaale au cardinal, donc c'est une base de E.

(iii) Il suffit d'exprimer en fonction des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ pour voir que $vect(e_1, e_2, u(e_2)) = vect(e, u(e), u^2(e))$, et que c'est ainsi une base de E.

(iv) On a: $u(u^2(e)) = ae + bu(e) + cu^2(e)$, alors:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

A et cette matrice $A^{'}$ sont semblables alors elles ont même trace donc $c = 2\lambda + \mu$.Ainsi A vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

3.4 **Cas où A possède une valeur propre triple:**

3.4.1 u possède une seule valeur propre et sa matrice n'est pas scalaire, alors il n'est pas diagonalisable.
A est trigonalisable et non diagonalisable, alors elle est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Donc, $A - \lambda I_3$ est semblableà $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A - \lambda I_3)^2$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, si $ab \neq 0$ le rang de $A - \lambda I_3 = 2$ et celui de $(A - \lambda I_3)^2$ vaut 1, donc $\dim Ker(u - \lambda Id_E) = 1$ et $\dim Ker(u - \lambda IdE)^2 = 2$ dóù $Ker(u - \lambda Id_E) \subsetneq Ker(u - \lambda IdE)^2$.
Dans le cas $ab = 0$, le rang de $A - \lambda I_3 = 1$ et celui de $(A - \lambda I_3)^2 = 0$, donc $\dim Ker(u - \lambda Id_E) = 2$ et $\dim Ker(u - \lambda I_3)^2 = 3$, aussi $Ker(u - \lambda Id_E) \subsetneq Ker(u - \lambda IdE)^2$.

3.4.2 e n'est pas un vecteur propre de u, alors $(e, u(e))$ est libre.

3.4.3 On a $u(u(e)) = u^2(e) = 2\lambda u(e) - \lambda^2 e$. De même,
$u(e_3) = ce + du(e) + ae$.
Donc la matrice de u dans cette base est:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & c \\ 1 & 2\lambda & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

A et $A^{'}$ sont semblables, alors elle ont même trace, donc $2\lambda + a = Tr(A) = 3\lambda$ et ensuite $a = \lambda$. C.Q.F.D

3.4.4 Calcul similaire à celui de la question (3.3.5 (v)).

3.4.5 Lorsque $\lambda = 0$, A sera semblable à un matrice dont la diagonale est $0, 0, 0$; donc elle vérifie la proporiété $\mathscr{P}$.