I- Questions de cours

1- Généralités sur les courants électriques

1-.1

La densité particulaire de charge mobiles est n. La charge des porteurs est $q = -e$ La densité volumique des charges mobiles est : $\rho = -ne = nq$

1-.2

L'expression de la charge contenue dans le volume élémentaire est :

$$d^3Q = -ne\vec{v}.d\vec{S}\,dt$$

1-.3

En écrivant que $d^3Q = \vec{j}.d\vec{S}\,dt$, l'expression du vecteur densité volumique de courant est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

1-.4

L'intensité du courant dans le conducteur est le flux du vecteur densité volumique de courant.

$$I = \int\int \vec{j}.d\vec{S} = -ne\vec{v}.\vec{S}$$

2- Bilan de la charge électrique en régime variable

2-.1

Pendant une durée élémentaire dt, l'expression de la charge reçue est :

- En x , $dQ_{surf}(x,t) = \vec{j}(x,t).\vec{S}\,dt$
- En x + dx , $dQ_{surf}(x+dx,t) = \vec{j}(x+dx,t).\vec{S}\,dt$

L'expression de la charge reçue est donc :

$$dQ_{surf} = \vec{j}(x,t).\vec{S}\,dt - \vec{j}(x+dx,t).\vec{S}\,dt = -\frac{\partial \vec{j}}{\partial x}.\vec{S}\,dxdt$$

2-.2

La variation de la charge au sein de la tranche est :

$$\rho(x,t+dt)Sdx - \rho(x,t)Sdx = \frac{\partial \rho}{\partial t}Sdxdt$$

2-.3

A une dimension, le bilan s'écrit : $\vec{j}(x,t).\vec{S}\,dt - \vec{j}(x+dx,t).\vec{S}\,dt = \frac{\partial \rho}{\partial t}Sdxdt$ Soit : $-\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

A trois dimension, cette relation devient :$div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

2-.4

On utilise l'équation de Maxwell - Gauss et Maxwell Ampère : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

Sachant que $div\overrightarrow{rot}\vec{X} = 0$ alors $\left(div\vec{j} + \varepsilon_0 div\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ et par conséquent : $div\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

3- Loi d'Ohm et effet Joule

3-.1

On applique le PFD sur l'électron dans le référentiel lié au conducteur.

$$-e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le champ $\vec{E}$ étant uniforme , la solution de l'équation différentielle est :

$$\vec{v} = \vec{v_0}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

3-.2

En régime permanent, la vitesse de l'électron est la vitesse limite dont l'expression est :

$$\vec{v}_l = -\frac{\tau e}{m}\vec{E}$$

Le vecteur densité volumique de courant est donc :

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

3-.3

Le vecteur densité volumique de courant est donc proportionnel au champ électrique et vérifie : $\vec{j} = \gamma.\vec{E}$ avec :

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

3-.4

Dans le cas d'un fil de longueur l, de section S et de conductivité γ , on peut écrire : $jS = \gamma ES$ Sachant que $E = \dfrac{U}{l}$ et $I = jS$, on en déduit que :

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

3-.5

Multiplions par $\vec{v}$ dt les termes de l'équation différentielle : $-e\vec{E}.\vec{v}\,dt - \dfrac{m}{\tau}\vec{v}.\vec{v}\,dt = m\vec{v}.\dfrac{d\vec{v}}{dt}dt$. On obtient donc :

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2 + eU\right)}{dt} = -\frac{m}{\tau}v^2$$

3-.6

La puissance de Joule relative à un électron est : $\frac{m}{\tau}v^2$.
Relativement à l'unité de volume, la puissance de Joule est : $p = n\frac{m}{\tau}v^2$.
En remplaçant v par son expression, on trouve :

$$p = n\frac{m}{\tau}\frac{e^2\tau^2}{m^2}E^2 = \gamma E^2 = \vec{j}.\vec{E}$$

3-.7

La puissance totale de Joule est : $P = \int\int\int \gamma E^2 d\tau = \gamma E^2 lS$.
En utilisant le fait que $E = \frac{U}{l}$ et $R = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{S}$, on obtient : $P = \frac{U^2}{R} = UI$.

II- Exemples de l'électricité domestique

1- Préliminaire sur le transfert thermique

1-.1

Loi d'Ohm s'écrit : $\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma\overrightarrow{grad}V$.
Par analogie, la loi de Fourier met en jeu la densité volumique de courant thermique et la variation de la température. Elle s'écrit :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda\overrightarrow{grad}T$$

λ étant la conductivité thermique jouant le rôle de la conductivité électrique.

1-.2

L'expression du flux surfacique thermique de convection reçu par le conducteur s'écrit :

$$\varphi_{cv} = h(T_0 - T)$$

1-.3

Le flux thermique surfacique rayonné par un corps de température T est donné par la loi de Stefan, elle s'écrit :

$$\varphi_{ra} = \sigma T^4$$

2- Fils de câblage d'un circuit électrique

2-.1

Le fil étant long et de forme cylindrique, il est donc invariant par rotation autour de son axe et par translation le long de l'axe. La température ne dépendra donc que de r.
Du fait que la température est fonction de r, il y'aura donc un flux thermique dirigé du cylindre de basse température vers le cylindre de haute température.

2-.2

Le flux thermique est radial, il est du à l'effet Joule. Cette puissance est donc $P = RI^2 = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{\pi a^2}I^2$.

2-.3

En régime permanent, la puissance thermique est constante : $j(r)2\pi rL = RI^2 = \dfrac{LI^2}{\gamma\pi a^2}$.

D'autre part : $j(r) = -\lambda_g \dfrac{dT}{dr}$.

T vérifie donc l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g}\frac{1}{r}$$

Sa solution est donc :

$$T = -\frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g}Ln(r) + C$$

Pour trouver la constante, écrivons que la température à la surface est T_0.

Remarquons que dans le texte on suppose que la gaine est en équilibre thermique avec l'air ambiant, car sinon il faut tenir compte du terme de convection et écrire qu'à $r = a+e$, on aura : $RI^2 = h(T_e - T_0)$.A

$$r = a+e, T = T_e = T_0 + \frac{LI^2}{\gamma h\pi a^2}$$

Le sujet propose de simplifier et de prendre à la surface T_0

Par conséquent : $C = T_0 + \dfrac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g}Ln(a+e)$

L'expression de la température dans la gaine est donc :

$$T = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g}Ln\left(\frac{a+e}{r}\right)$$

2-.4

Faisons un bilan thermique sur un cylindre de rayon r inférieur à a.

$$j(r)2\pi rL = R(r)I(r)^2 = \frac{L}{\gamma\pi r^2}\frac{I^2r^4}{a^4}$$

D'autre part : $j(r) = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$.

T vérifie donc l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{I^2r}{2\pi^2\gamma\lambda a^4}r$$

Sa solution est donc :

$$T = -\frac{I^2}{4\pi^2\gamma a^4\lambda}r^2 + C'$$

Pour trouver la constante, utilisons le fait que la surface fil - gaine est parfaite et qu'à la surface : $r = a$ la température est la même.

Par conséquent : $C' = T_0 + \dfrac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g}Ln\dfrac{a+e}{a} + \dfrac{I^2a^2}{4\pi^2\gamma a^4\lambda}$

L'expression de la température dans la gaine est donc :

$$T = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g}Ln\left(\frac{a+e}{a}\right) + \frac{I^2}{4\pi^2\gamma a^4\lambda}\left(a^2 - r^2\right)$$

2-.5

La température est maximale en $r = 0$, et elle vaut :

$$T_{max} = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g} Ln\left(\frac{a+e}{a}\right) + \frac{I^2}{4\pi^2\gamma a^2\lambda}$$

2-.6

La température de la gaine décroît lorque r croit. Elle est donc maximale en $r = a$.
L'expression de la température maximale est donc :

$$T_{max} = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^2\lambda_g} Ln\left(\frac{a+e}{a}\right)$$

.

Cette température doit rester inférieure à $T_{f,g}$.
Par conséquent , l'intensité I doit vérifier l'inégalité :

$$I^2 < \frac{2\pi^2\gamma\lambda_g a^2}{Ln\left(\frac{a+e}{a}\right)}\left(T_{f,g} - T_0\right)$$

l'intensité maximale est donc :

$$I_{max} = \sqrt{\frac{2\pi^2\gamma\lambda_g a^2}{Ln\left(\frac{a+e}{a}\right)}\left(T_{f,g} - T_0\right)}$$

3- Lampe à incandescence

3-.1

La puissance reçue par la lampe est telle que : $P = \dfrac{U^2}{R}$ avec $R = \dfrac{U^2}{P} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{L}{S}$.

Par conséquent, $\dfrac{U^2}{P} = \dfrac{L}{S}\dfrac{T^{1,2}}{K}$. D'où

$$\left(T = \frac{KSU^2}{PL}\right)^{\frac{1}{1,2}} = 2,40.10^3 K$$

3-.2

Le temps τ mis pour atteindre la température T_f peut être estimé en appliquant le premier principe :

$$\mu SLCdT = \frac{V^2}{R(T)}dt$$

On remplace R par son expression :

$$\mu SLCdT = \frac{V^2\gamma S}{L}dt = \frac{V^2 kS}{L}T^{-1,2}dt$$

D'où $dt = \dfrac{\mu CL^2}{kV^2}T^{1,2}dT$.
On intègre entre T_0 et T_f, on obtient :

$$\tau = \frac{\mu CL^2}{2,2kV^2}\left(T_f^{2,2} - T_0^{2,2}\right)$$

Application numérique : $T_i = 300K$. On trouve $\tau = 10ms$.

3-.3

En supposant que la puissance électrique reçue est rayonnée et en supposant que le fil est convexe, on peut écrire :

$$P = \sigma T'^4 2\pi a l$$

Application numérique : $T' = 2,4.10^3 K$

3-.4

On utilise la loi de Wien

$$\lambda_m T_m = 29.10^{-4} SI$$

, d'où

$$\lambda_m = \frac{29.10^{-4}}{T'} = 1,2 \mu m$$

Le filament émet donc dans l'infra rouge.

4- Protection contre les surintensités par un fusible

4-.1

considérons une tranche d'épaisseur dx et faisons un bilan d'énergie :

$$j_{th}(x,t) S dt - j_{th}(x+dx,t) S dt + \frac{1}{\gamma_p}\frac{dx}{S} I^2 dt = \mu_p S dx C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on obtient :

$$\lambda_p \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pi a^2 + \frac{I^2}{\gamma_p \pi a^2} = \mu_p C_p \pi a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

4-.2

En régime permanent, la température vérifie l'équation différentielle :

$$\lambda_p \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pi a^2 + \frac{I^2}{\gamma_p \pi a^2} = 0$$

Autrement :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{I^2}{\lambda_p \gamma_p \pi^2 a^4}$$

Dont la solution est :

$$T = -\frac{I^2}{2\lambda_p \gamma_p \pi^2 a^4} x^2 + Ax + B$$

Les conditions aux limites sont telles que : $T(x=0) = T_0$ et $T(x=l) = T_0$. D'où la solution tenant compte de ces conditions :

$$T = -\frac{I^2}{2\lambda_p \gamma_p \pi^2 a^4} x^2 + \frac{I^2 l}{2\lambda_p \gamma_p \pi^2 a^4} x + T_0$$

4-.3

Le maximum de T correspond à

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

, cela correspond à $x_{max} = \frac{l}{2}$.

4-.4

On remplace x par x_{max}, on trouve la température maximale qui est :

$$T_{max} = T_0 + \frac{I^2 l^2}{8\mu_p \gamma_p \pi^2 a^4}$$

4-.5

A $I = I_{max}$, la température doit rester inférieure à $T_{f,p}$, donc :

$$T_{max} < T_{f,p} \Leftrightarrow T_0 + \frac{I^2 l^2}{8\mu_p \gamma_p \pi^2 a^4} < T_{f,p}$$

le rayon a doit donc vérifier :

$$a^4 > \frac{I^2 l^2}{8\mu_p \gamma_p \pi^2 \left(T_{f,p} - T_0\right)}$$

Le rayon minimal vérifie donc la relation :

$$a_{min} = \left[\frac{I^2 l^2}{8\mu_p \gamma_p \pi^2 \left(T_{f,p} - T_0\right)}\right]^{\frac{1}{4}} = 0,35mm$$

4-.6

On utilise le plomb car sa température de fusion est basse.

III- Exemples d'électricité dans l'atmosphère

1- Atmosphère nuageuse

1-.1

Utilisons l'équation de Maxwell Gauss en un point près du sol :

$$div\overrightarrow{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

On projette suivant Oz on obtient donc :

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

On intègre et on aura avec $E(z=0) = 0$:

$$\overrightarrow{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z \overrightarrow{e}_z$$

1-.2

Entre $z = h_0$ et$z = h_1$, l'équation de Maxwell Gauss s'écrit :

$$div\overrightarrow{E} = 0$$

$\dfrac{dE}{dz} = 0$. Le champ est donc uniforme et sa valeur est $E(z = h_0)$ par continuité. D'où :

$$\overrightarrow{E}_0 = \frac{\rho_0 h_0}{\epsilon_0}\overrightarrow{e}_z$$

1-.3

A l'intérieur du nuage, la charge volumique est linéaire : $\rho = \alpha z + \beta$, avec :

$$\rho_1 = \alpha h_1 + \beta$$

$$-\rho_1 = \alpha h_2 + \beta$$

D'où l'expression de la charge volumique :

$$\rho = \frac{2\rho_1}{h_1 - h_2}z + \rho_1\frac{2h_m}{h_2 - h_1}$$

1-.4

On applique l'équation de Maxwell - Gauss : $div\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \dfrac{dE}{dz} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.
On intègre et on obtient :

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\alpha}{2}z^2 + \beta z + C\right)$$

Par continuité en $z = h_0$, on trouve :

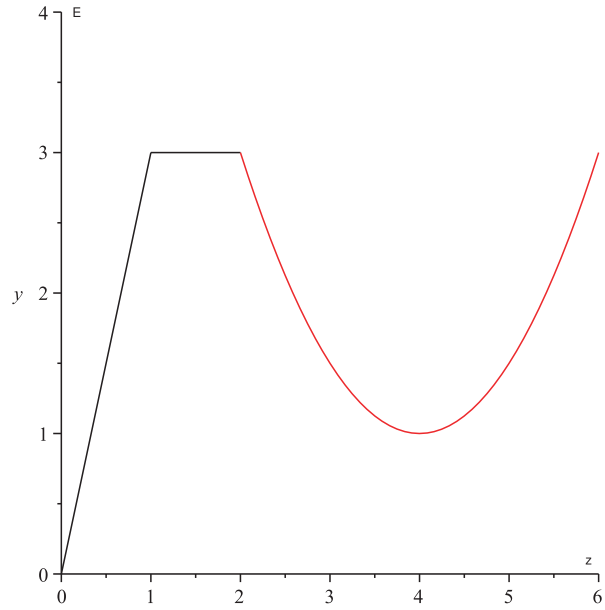
$$\frac{\rho_0 h_0}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\alpha}{2}h_1^2 + \beta h_1 + C\right)$$

D'où l'expression du champ dans le nuage :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho_0 h_0 + \frac{\rho_1}{h_1 - h_2}z^2 - \frac{2\rho_1 h_m}{h_1 - h_2}z + \frac{\rho_1 h_1 h_2}{h_1 - h_2}\right]\overrightarrow{e}_z$$

1-.5

Le graphe représentant E en fonction de z est le suivant :



2- Modélisation de la foudre

2-.1

L'équation différentielle vérifiée par la charge est :

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{RC}=0$$

2-.2

La solution de cette équation différentielle tenant compte des conditions initiales est :

$$Q=CU_0e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$$

l'intensité I(t) vérifie : $I=-\frac{dQ}{dt}=\frac{U_0}{R}e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$.

2-.3

La charge écoulée par la foudre est représentée par l'aire de la courbe :

$$|Q|=\frac{I_m t_1}{2}+I_m(t_2-t_1)+\frac{I_m(t_3-t_2)}{2}=54,9C$$

2-.4

L'énergie initiale du condensateur est

$$E_l=\frac{1}{2}|Q|U_0=274MJ$$

2-.5

La valeur de la capacité du condensateur est :

$$C=\frac{|Q|}{U_0}=5,49\mu F$$

3- Activité magnétique

Le fil est infini, la distribution de courant est uniforme. On a alors invariance par translation suivant Oz et par rotation autour de Oz. Par conséquent :

$$\overrightarrow{B}(r,\theta,z) = \overrightarrow{B}(r,t)\overrightarrow{e}_\theta$$

3-.1

On applique le théorème d'Ampère. On prend comme contour le cercle d'axe Oz et de rayon r.

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e}_\theta \qquad si\, r > a$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\overrightarrow{e}_\theta \qquad si\, r < a$$

3-.2

La force de Laplace exercée sur le canal est $\overrightarrow{F} = \int I d\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B}$, Le champ magnétique est porté par $\overrightarrow{e}_\theta$, alors que $\overrightarrow{l}$ est porté par $\overrightarrow{e}_z$.

La force est donc portée par $-\overrightarrow{e}_r$, le canal a donc tendance à s'imploser.

3-.3

Le flux magnétique à travers le circuit est variable car I dépend du temps, il y'aura donc apparition d'une force électromotrice d'induction. Le flux élémentaire est $d\Phi = \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r}dr$.

Le flux total à travers le circuit est : $\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi}Ln\left(\frac{D+\frac{d}{2}}{D-\frac{d}{2}}\right)$.

L'expression de la force électromotrice d'induction est donc :

$$e(t) = -\frac{\mu_0 d}{2\pi}\frac{dI}{dt}Ln\left(\frac{D+\frac{d}{2}}{D-\frac{d}{2}}\right)$$

3-.4

On applique la loi des mailles : $u + e = Ri + L\frac{di}{dt}$, d'où l'équation différentielle :

$$U_m cos(\omega t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{\mu_0 d}{2\pi}\frac{dI}{dt}Ln\left(\frac{D+\frac{d}{2}}{D-\frac{d}{2}}\right)$$

3-.5

La perturbation est caractérisée par ε.

3-6-1 : e(t) max correspond à

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{max}$$

D'où :

$$\varepsilon = \frac{1}{U_m}\frac{\mu_0 d}{2\pi}\left|\frac{dI}{dt}\right|_{max} Ln\left(\frac{D+\frac{d}{2}}{D-\frac{d}{2}}\right)$$

En supposant que $D >> d$, on peut écrire un DL du Ln.

$$Ln\left(\frac{D+\frac{d}{2}}{D-\frac{d}{2}}\right) = Ln\left(1+\frac{d}{D}\right) = \frac{d}{D}$$

L'expression devient :

$$\varepsilon = \frac{1}{U_m}\frac{\mu_0 d}{2\pi}\left|\frac{dI}{dt}\right|_{max}\frac{d}{D}$$

$$\varepsilon \leq 0,01 \Longrightarrow D \geq \frac{\mu_0 d^2}{2\times 0,01\pi U_m}\left|\frac{dI}{dt}\right|_{max}$$

L'expression de la distance minimale est :

$$D_{min} = \frac{\mu_0 d^2}{2\times 0,01\pi U_m}\left|\frac{dI}{dt}\right|_{max} =$$

3-6-2 : D'après le graphe, $\left|\frac{dI}{dt}\right|_{max} = \frac{I_m}{t_1}$, cela correspond à :

$$D_{min} = 1,8km$$

L'approximation $d << D$ est alors justifiée.

4- Décharge de la foudre dans le sol

4-.1

En supposant que le sol est conducteur, homogène et isotrope, les lignes de courant seront radiales de centre O. $\vec{j}$ dépendra de $r = OM$. Avec cette hypothèse, on peut écrire la relation suivante entre I et J :

$$I = j \times 2\pi r^2$$

4-.2

La loi d'Ohm permet d'exprimer le potentiel V :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2}\vec{e}_r = \gamma_s \vec{E} = -\gamma_s \overrightarrow{grad} V$$

On projette suivant $\vec{e}_r$, on obtient : $dV = -\frac{I}{2\pi\gamma_s}\frac{dr}{r^2}$.
On intègre en prenant $V(\infty) = 0$ et on trouve :

$$V = \frac{I}{2\pi\gamma_s r}$$

4-.3

L'expression de la différence de potentiel est :

$$V_A - V_B = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+p}\right)$$