Concours commun marocain
Épreuve de Physique I- PSI

Corrigé

Exemples de l'électricité dans note entourage

I Généralités

I.1. Questions de cours sur les courants électriques

I.1.1. Densité volumique des charges mobiles :

$$\boxed{\rho(M) = nq}$$

I.1.2. Charge d'un volume élémentaire :

$$\boxed{d^3Q = \rho(M)d\tau = nq.\vec{v}.d\vec{S}.dt}$$

I.1.3. Vecteur densité volumique de courant :
la charge transportée par le courant à travers dS pendant dt est $d^3Q = dI.dt$, donc

$$nq.\vec{v}.d\vec{S}.dt = \vec{j}(M).d\vec{S}.dt \Longrightarrow \boxed{\vec{j}(M) = nq.\vec{v} = \rho(M).\vec{v}}$$

I.1.4. Intensité de courant :
définition :

$$\boxed{I = \iint_S \frac{d^3Q}{dt} = \iint_S nq.\vec{v}.d\vec{S}}$$

donc

$$\boxed{I = \rho(M)Sv}$$

I.2. Bilan de la charge électrique en régime variable

I.2.1. la charge dQ_{surf} résulte d'un échange à travers les sections d'abscisses x et $x+dx$, donc

$$dQ_{\text{surf}} = \rho(x,t)Sv(x,t)dt - \rho(x+dx,t)Sv(x+dx,t)dt$$

donc

$$\boxed{dQ_{\text{surf}} = -S \times dx \times \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}}$$

I.2.2. La variation de la charge du volume $d\tau$ est :

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = v \times dt \times S \times \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

I.2.3. La conservation de la charge stipule que la variation de la charge est égale au bilan des charges reçues à travers la frontière, donc

$$-S \times dx \times \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}dt = v \times dt \times S \times \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0}$$

A trois dimensions cette équation s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div }(\rho\vec{v}) = 0}$$

I.2.4. Utilisation des équations de Maxwell dans la matière : D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\rho = \varepsilon_0 \text{div } \overrightarrow{E} \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \text{div } \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Or d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{B} - \overrightarrow{j}$$

En appliquant l'opérateur div à cette équation et compte tenu de la propriété

$$\text{div } \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

on obtient

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \overrightarrow{j}}$$

I.2.5. Régime permanent :

I.2.5.1. En régime permanent ρ ne dépend pas du temps, donc l'équation locale de conservation de la charge s'écrit simplement :

$$\boxed{\text{div } \overrightarrow{j} = 0}$$

d'où la propriété de conservation du flux de $\overrightarrow{j}$:

$$\boxed{\oiint_S \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S} = 0}$$

I.2.5.2. La conservation du flux de $\overrightarrow{j}$ s'appelle aussi loi des nœuds : En un nœud donné :

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k I_k = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant est dans le sens positif choisi,
$\varepsilon_k = -1$ sinon.
Au nœud A de la figure ci-contre, il n'y a pas d'accumulation de la charge en régime permanent, donc la charge qui arrive en A pendant la durée Δt est égale à la charge qui quitte A pendant la même durée :

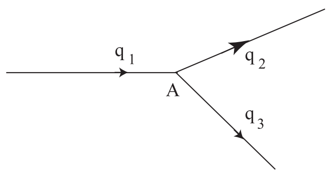

Fig 1 – Loi des nœuds

$$q_1 = q_2 + q_3 \Longrightarrow \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} + \frac{dq_3}{dt}$$

ainsi

$$I_1 = I_2 + I_3$$

I.3. Sensibilité du pont de Wheatstone

I.3.1. Considérons le montage de la figure 2. Notons I_1 le courant traversant les résistances R_1 et R_2 de A vers C, et I_4 le courant traversant les résistances R_4 et R_3 de A vers C.
La loi des nœuds donne : $I_0 = I_2 + I_4$.
La loi des mailles donne successivement :

$$I_1 = \frac{V_e}{R_1 + R_2} \qquad \text{et} \qquad I_4 = \frac{V_e}{R_3 + R_4}$$

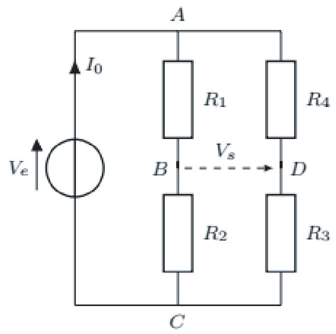

Fig 2 – Pont de Wheatstone

On a

$$V_s = U_{DC} - U_{BC} = R_3 \frac{V_e}{R_3 + R_4} - R_2 \frac{V_e}{R_1 + R_2}$$

d'où

$$V_s = V_e \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

soit

$$\boxed{V_s = V_e \frac{(R_1 R_3 - R_2 R_4)}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}}$$

I.3.2. Lorsque le pont est équilibré, on obtient $V_s = 0$, donc

$$\boxed{R_3 R_1 = R_2 R_4}$$

I.3.3. on se place successivement dans le cas où seule varie R_1 puis R_2.

– variation de R_1 : Par dérivation de V_s on obtient

$$\frac{dV_s}{dR_1} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} > 0$$

donc si $\underline{R_1 \text{ augmente}}$, $\underline{V_s \text{ augmente}}$.

– variation de R_2 : Par dérivation de V_s on obtient :

$$\frac{dV_s}{dR_2} = -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} < 0$$

donc si $\underline{R_2 \text{ augmente}}$, $\underline{V_s \text{ diminue}}$.

En conclusion, les variations de chacune des résistances R_1 ou R_2 induisent des variations de V_s en sens contraire.

I.3.4. Les résistances R_3 et R_4 interviennent dans l'expression de V_s de la même forme que les résistances R_1 et R_2 respectivement. Donc leur variations séparées induisent des variations de V_s en sens contraires.

I.3.5. On sait que :

$$V_s = V_e \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Notons

$$\alpha = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

donc

$$dV_s = V_e(d\alpha - d\beta)$$

$$d\alpha = \frac{(R_3+R_4)dR_3 - R_3(dR_3+dR_4)}{(R_3+R_4)^2}$$

$$d\alpha = \frac{R_4dR_3 - R_3dR_4}{(R_3+R_4)^2} = \frac{R_3R_4}{(R_3+R_4)^2}\left(\frac{dR_3}{R_3} - \frac{dR_4}{R_4}\right)$$

De la même manière :

$$d\beta = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1}\right)$$

et comme

$$R_1R_2 = R_2^2 x$$

on déduit

$$d\beta = x\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1}\right)$$

soit

$$d\beta = \frac{x}{(1+x)^2}\left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1}\right)$$

d'autre part

$$R_1R_3 = R_2R_4 \Longrightarrow R_4 = R_3 x$$

donc

$$d\alpha = \frac{x}{(1+x)^2}\left(\frac{dR_3}{R_3} - \frac{dR_4}{R_4}\right)$$

par suite :

$$\boxed{dV_s = V_e \cdot s\left(\frac{dR_3}{R_3} - \frac{dR_4}{R_4} - \frac{dR_2}{R_2} + \frac{dR_1}{R_1}\right)}$$

avec

$$\boxed{s = \frac{x}{(1+x)^2}}$$

I.3.6. Etude de $s(x)$:
On a $s(0) = 0$ et $s(\infty) = 0$, donc s passe par un maximum.

$$s'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x)^4}$$

le maximum correspond à $x_0 = 1$.
La sensibilité maximale vaut $s_{max} = 0,25$.

I.3.7. A l'équilibre du pont avec une sensibilité maximale,

$$\boxed{R_1 = R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_3 = R_4}$$

I.3.8. Effet de la résistance R_1 seule :
A l'ordre 1 :

$$\boxed{V_s = V_e \times \frac{\Delta R}{R_1}}$$

I.3.9. Effets simultanés de R_1 et R_2 :

$$\boxed{V_s = V_e \times \left(\frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta R}{R_2}\right) = 2V_e\frac{\Delta R}{R_1}}$$

Commentaire : Lorsque les deux résistances adjacentes varient à la fois avec la même quantité et en sens inverse, la tension de sortie devient double.

II Etude d'un capteur d'éclairement maximal

II.1. Préliminaire : énergie électromagnétique solaire

II.1.1. L'extension géométrique d'un panneau solaire est de l'ordre du mètre et la distance terre-soleil est de l'ordre de 10^{11} m, donc l'angle sous lequel est vu le panneau depuis le soleil est de l'ordre de 10^{-11} rad. Il s'agit bien de rayons presque parallèles.

II.1.2. Champ magnétique : En notation complexe : $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0.e^{i(\omega t - kz)}.\overrightarrow{u}_x$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} \Longrightarrow -ik.\overrightarrow{u}_z \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = -i\omega \underline{\overrightarrow{B}}$$

donc

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz).\overrightarrow{u}_y}$$

II.1.3. Vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\Pi}(M,t) = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi}(M,t) = \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t - kz).\overrightarrow{u}_z}$$

sa valeur moyenne vaut :

$$\boxed{< \overrightarrow{\Pi} >= \frac{kE_0^2}{2\mu_0 \omega}.\overrightarrow{u}_z}$$

II.1.4. Puissance surfacique moyenne reçue :

$$\boxed{\varphi_0 = || < \overrightarrow{\Pi} > || = \frac{kE_0^2}{2\mu_0 \omega} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c}{2}}$$

Numériquement :

$$\boxed{\varphi_0 = 1000 \text{ W.m}^{-2}}$$

II.1.5. Flux instantané :
Au cours de la rotation, le rayon solaire fait un angle $\theta = \omega(t - t_0)$ par rapport au zénith, et puisque le flux est la projection du vecteur de Poynting sur la normale à la surface, on déduit :

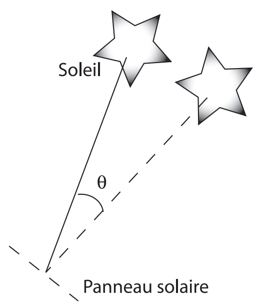

Fig 3 – Mouvement apparent

$$d\Phi = \varphi(t_0) dS \cos(\omega(t - t_0))$$

ainsi

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{d\Phi}{dS} = \varphi_{max} \cos\left(2\pi \frac{(t - t_0)}{T}\right)}$$

II.1.6. Énergie surfacique reçue par le sol :

$$E_s = \int_{t_0 - \alpha T}^{t_0 + \alpha T} \varphi(t).dt$$

soit

$$\boxed{E_s = \frac{T}{\pi} \varphi_{max} \sin(2\pi\alpha)}$$

II.1.7. La grandeur η vaut :

$$\boxed{\eta = \frac{E_s}{2\varphi_{max}.\alpha.T} = \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\alpha}}$$

la quantité η définit la visibilité du rayonnement. Pour $\alpha = 1/4$ elle vaut

$$\boxed{\eta = \frac{2}{\pi} = 0,64}$$

La valeur $\alpha = \frac{1}{4}$ correspond au maximum principal de η, donc un panneau solaire reçoit une puissance maximale lorsqu'il est réglé à la valeur $\alpha = \frac{1}{4}$.

II.1.8. La puissance surfacique moyenne φ_{max} varie au cours de l'année car l'axe de rotation de la Terre n'est pas perpendiculaire au plan de l'écliptique. Selon la saison, la surface exposée change d'orientation relative par rapport aux rayons solaires.

II.2. Etude d'un suiveur du soleil

II.2.1. Dans la figure 3(c) les résistances reçoivent le même flux solaire, donc

$$\boxed{R_{O1} = R_{E1}}$$

II.2.2. Grandeur de précision :

$$\tan\Delta\theta = \frac{CB}{BA} = \frac{2}{46} \Longrightarrow \Delta\theta = 2,49°$$

II.2.3. Etude en pont de Wheatstone

II.2.3.1. D'après la partie I, la tension V_s vaut :

$$\boxed{V_s = V_e\left(\frac{R_{O2}}{R_{O2}+R_{E2}} - \frac{R_{E1}}{R_{O1}+R_{E1}}\right)}$$

II.2.3.2. A l'équilibre du pont : $V_s = 0$ donc

$$\frac{R_{O2}}{R_{O2}+R_{E2}} = \frac{R_{E1}}{R_{O1}+R_{E1}} \Longrightarrow \boxed{R_{O1}R_{O2} = R_{E1}R_{E2}}$$

II.2.3.3. Discussion :

- Si $R_{O1}R_{O2} > R_{E1}R_{E2}$ alors $V_s > 0$ cela signifie que la partie Est est plus éclairée que la partie Ouest, donc le moteur du SS est actionné à tourner le panneau vers l'Est.
- Si $R_{O1}R_{O2} < R_{E1}R_{E2}$ alors $V_s < 0$ cela signifie que la partie Est est moins éclairée que la partie Ouest, donc le moteur du SS est actionné à tourner le panneau vers l'Ouest.
- Le cas $V_s = 0$ signifie que le panneau est dans la position de consigne,c'est-à-dire que le flux de lumière est répartie symétriquement sur les VDR.

II.2.3.4. Mesure des tensions de sortie :

On a classiquement

$$V_{S1} = (R+9R)\frac{V_E}{9R} = \frac{10V_E}{9}$$

et

$$V_{S2} - V_{S1} = (R+9R)\frac{V_O - V_{S1}}{R} = 10(V_O - V_{S1}) \Longrightarrow V_{S2} = 10(V_O - V_{S1}) + V_{S1}$$

d'où

$$\boxed{V_{S2} = 10(V_O - V_E)}$$

Le montage joue le rôle d'un amplificateur différentiel.

III Etude d'un capteur de déplacement

III.1. Expression de la capacité d'un condensateur plan

III.1.1. Champ entre les armatures : La distribution de charge est invariante par rotation autour de l'axe Oz et par translation perpendiculairement à Oz, donc le champ ne dépend a priori que de la variable z.
Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution, donc $\overrightarrow{E}$ est porté par $\overrightarrow{u}_z$:

$$\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u}_z$$

III.1.2. D'après la question III.1.1. et le théorème de Gauss, le champ est nul en tout point à l'extérieur de l'espace inter-armatures.
On applique le théorème de Gauss à la surface fermée d'un cylindre d'axe Oz et de rayon $r < \ell/2$ dont l'une des bases contient le point M et l'autre est située à l'extérieur du cylindre.

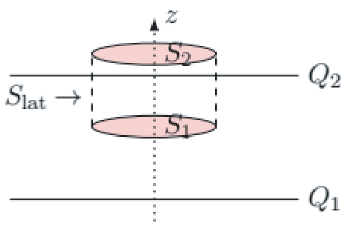

Fig 4 – Condensateur plan

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.dS\overrightarrow{n}_{\text{ext}} = \frac{\sigma \times \pi \times r^2}{\varepsilon_0}$$

avec $\Sigma = S_1 \bigcup S_{\text{lat}} \bigcup S_2$.
le flux à travers la surface latérale et à travers S_2 est nul, donc

$$E(z) \times \pi \times r^2 = \frac{\sigma \times \pi \times r^2}{\varepsilon_0}$$

donc

$$E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\ell^2 \varepsilon_0}$$

ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{Q_1}{\ell^2 \varepsilon_0}.\overrightarrow{u}_z}$$

III.1.3. ddp :

$$V = V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{OM} = \int_0^e \frac{Q_1}{\ell^2 \varepsilon_0} dz$$

$$\boxed{V = \frac{Q_1 \times e}{\ell^2 \varepsilon_0}}$$

III.1.4. Capacité du condensateur : Par définition : $C = \frac{Q}{V}$, donc dans notre cas :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \ell^2}{e}}$$

III.2. Capteur de déplacements

III.2.1. Capacité commune :

A l'état initial, un condensateur est équivalent à deux condensateurs associés en parallèles chacun de largeur $\ell/2$ mais de permittivités différentes, donc

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \ell^2}{2e} + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \ell^2}{2e}$$

soit

$$\boxed{C_0 = (1+\varepsilon_r)\frac{\varepsilon_0 \ell^2}{2e}}$$

III.2.2. Lorsque le noyau se déplace d'une quantité x selon $x'x$ le condensateur 1 voit sa capacité changer :

$$C_1(x) = \frac{\varepsilon_0 \ell(\frac{\ell}{2}+x)}{e} + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \ell(\frac{\ell}{2}-x))}{e}$$

soit

$$\boxed{C_1(x) = C_0 + (1-\varepsilon_r)\frac{\varepsilon_0 \ell x}{e}}$$

d'où la variation

$$\boxed{\delta C_1(x) = (1-\varepsilon_r)\frac{\varepsilon_0 \ell x}{e}}$$

Un raisonnement analogue pour le deuxième condensateur conduit à

$$\boxed{C_2(x) = C_0 + (-1+\varepsilon_r)\frac{\varepsilon_0 \ell x}{e}}$$

d'où la variation

$$\boxed{\delta C_2(x) = (-1+\varepsilon_r)\frac{\varepsilon_0 \ell x}{e}}$$

III.2.3. *Cette que*

III.2.4. Tension différentielle :

$$v_s = v_D - v_B = v_e \left(\frac{R}{R+R} - \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_2}+Z_{C_1}}\right)$$

soit

$$\boxed{v_s = v_e \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\frac{C_2}{C_1}}\right)}$$

III.2.5. A l'équilibre du pont : $v_s = 0$ donc

$$1 + \frac{C_2}{C_1} = 2 \Longrightarrow \boxed{C_1 = C_2}$$

III.2.6. Pour l'amplificateur **AO3** on peut écrire :

$$V_3^+ = \frac{R_4}{R_4+R_3} v_{s1} \qquad \text{et} \qquad V_3^- = \frac{\frac{v_{s3}}{R_4} + \frac{v_{s2}}{R_3}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}}$$

comme $V_3^+ = V_3^-$ on déduit :

$$R_4 v_{s1} = R_3 v_{s3} + R_4 v_{s2} \Longrightarrow v_{s3} = \frac{R_4}{R_3}(v_{s1} - v_{s2})$$

d'autre part :

$$v_D = \frac{\frac{v_B}{R_1} + \frac{v_{s1}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

et

$$v_B = \frac{\frac{v_D}{R_1} + \frac{v_{s2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

par différence on obtient :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(v_D - v_B) = \frac{1}{R_1}(v_B - v_D) + \frac{1}{R_2}(v_{s1} - v_{s2})$$

ainsi

$$v_{s1} - v_{s2} = \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)(v_D - v_B)$$

et par suite

$$\boxed{v_{s3} = \frac{R_4}{R_3}\left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)(v_D - v_B)}$$

Pour $R_3 = R_4$ on obtient :

$$\boxed{v_{s3} = \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)(v_D - v_B)}$$

Il s'agit d'un montage amplificateur différentiel.