

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les numéros des questions abordées.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Les différentes parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé ou un oubli, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Oscillations. Couplages

On parle d'oscillations de grandeurs physiques lorsque celles-ci varient périodiquement; elles sont décrites par les mêmes équations quelle qu'en soit leur nature (mécanique, électrique, etc.). Dans certaines situations les oscillations temporelles peuvent aussi se propager dans l'espace. Lorsque des grandeurs physiques quelconques sont interdépendantes, on dit qu'elles sont couplées : c'est le cas lorsqu'on a des liaisons entre oscillateurs (mécaniques, électriques, ...), et on peut alors avoir des transferts énergétiques.

Données

- Il peut être commode d'utiliser la notation complexe; ainsi à une grandeur sinusoïdale fonction du temps $f(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le complexe souligné $\underline{f}(t) = F_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$, où $j^2 = -1$, et tel que $f(t)$ représente sa partie réelle : $f(t) = \text{Re}(\underline{f}(t))$; et on notera son conjugué par \underline{f}^* .
- On notera par $\dot{f}(t)$ et $\ddot{f}(t)$ les dérivées temporelles première et seconde d'une fonction $f(t)$.
- Le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme, vertical, descendant et de module $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Exercice : oscillateurs élastiques libres non amortis (barème 4 points sur 20)

On étudie les mouvements par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen $R(OXYZ)$, l'axe OZ est descendant. On néglige tout frottement.

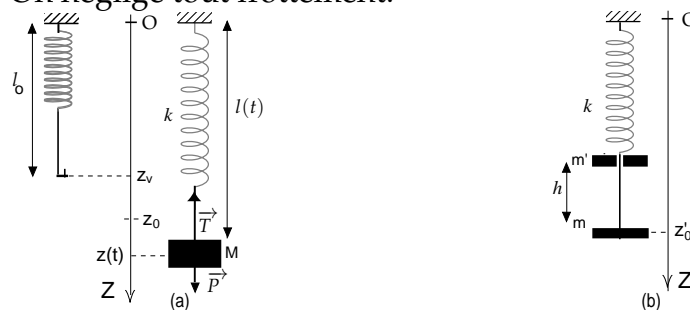


Figure 1 – Oscillateur élastique (a). Étude d'un choc (b)

1. Oscillateur élastique

On considère la figure 1(a), et on étudie le mouvement d'un solide de masse M accroché à un ressort vertical à spires non jointives, sans masse, de longueur à vide l_0 et de raideur k . Le barycentre G est repéré à partir de l'autre extrémité fixe O , du ressort, par $\vec{OG} = z \cdot \vec{u}_z$. On pose : $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

1.1 Donner l'expression de la tension $\vec{T}(z)$ exercée par le ressort sur le solide.

1.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique, et montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\ddot{z} + \frac{k}{M} \cdot (z - l_0 - \frac{Mg}{k}) = 0$.

On pose : $z_c = l_0 + \frac{Mg}{k}$. On admet qu'à l'instant initial l'abscisse est $OG(t = 0) = z_0 < z_c$ et la vitesse du mobile est $\dot{z}(t = 0) = v_0$, avec $0 < v_0 < \frac{g}{\omega}$. On étudie les oscillations du mobile.

1.3 Montrer que $z(t) = z_c + z_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, et déterminer les constantes z_m et $\tan(\varphi)$.

1.4 Tracer l'allure du portrait de phase en précisant le sens; indiquer les coordonnées des points : d'abscisse initiale z_0 , d'abscisses extrêmes et celui où la vitesse est maximale.

1.5 Chute libre, choc et oscillations

On considère maintenant la figure 1(b). Un solide de masse m' tombe en chute verticale, sans vitesse initiale depuis une hauteur h , sur un autre solide de masse $m = \frac{m'}{4}$; ce dernier solide, suspendu à un ressort de raideur k , était initialement immobile. Le choc a lieu à l'instant $t = 0$, et ensuite les deux solides sont accolés et forment un seul solide de masse M , lié au ressort, et la position initiale de son barycentre est z_0 .

1.5.1 Déterminer l'expression de la vitesse v'_0 de la masse m' juste avant le choc ($t = 0^-$).

1.5.2 Déterminer l'expression de la vitesse v_0 de la masse M juste après le choc ($t = 0^+$).

1.5.3 Déterminer l'équation horaire $z(t)$ du solide de masse M après le choc.

2. Deux oscillateurs couplés par un ressort de raideur k_c

Deux solides S_1 et S_2 de masses respectives m_1 et m_2 sont accrochés en deux points fixes O_1 et O_2 par deux ressorts, respectivement, de raideur k_1 et k_2 , et de longueur à vide l_{10} et l_{20} . Les deux solides sont reliés entre eux par un troisième ressort de raideur k_c et de longueur à vide l_{c0} . Les deux solides peuvent glisser sans frottements le long de l'axe $X'X$ et les barycentres des solides G_1 et G_2 sont repérés à partir des positions d'équilibre initiales $\overrightarrow{G_{i,c}G_i} = x_i(t)$. $\vec{u}_x, i = 1, 2$: voir figure 2.

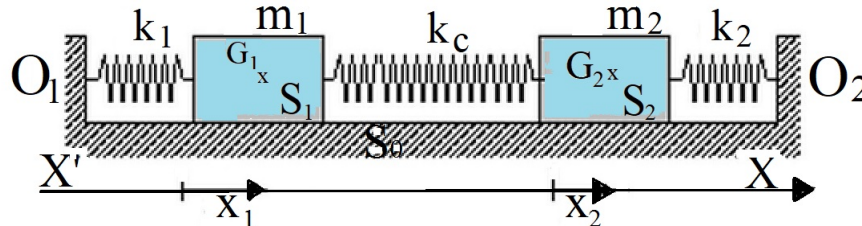


Figure 2 – Deux oscillateurs couplés

2.1 En utilisant l_{1e} , l_{2e} et l_{ce} les longueurs respectives à l'équilibre des ressorts k_1, k_2 et k_c ; ainsi que x_1 et x_2 , exprimer les quatre tensions :

\vec{T}_1 et \vec{T}_{1c} exercées respectivement par les ressorts k_1 et k_c sur S_1 ; ainsi que \vec{T}_2 et \vec{T}_{2c} exercées respectivement par les ressorts k_2 et k_c sur S_2 .

2.2 Établir le système d'équations différentielles des mouvements de S_1 et de S_2 .

On considère le cas particulier $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$; on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\omega_c^2 = \frac{k_c}{m}$.

2.3 Réécrire le système d'équations vérifiées par les élongations $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

2.4 On introduit les changements de variables $\alpha = x_1 + x_2$ et $\beta = x_1 - x_2$.

Montrer que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont sinusoïdales et exprimer leurs pulsations notées respectivement ω_α et ω_β en fonction de ω_0 et ω_c .

Déterminer la forme générale des solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Problèmes : oscillations ; couplages (barème : 16 points sur 20)

I^{er} problème : étude d'un oscillateur électronique

I.1. Fonctions de transfert en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω

On se propose de déterminer les fonctions de transfert de deux filtres passifs représentés en figures 3(a) et 3(b).

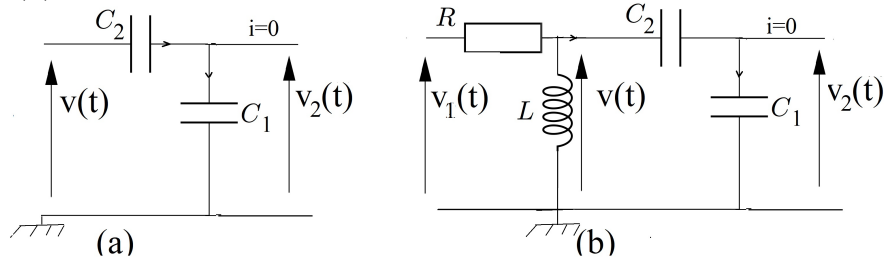


Figure 3 – filtres passifs (a) et (b)

I.1.1. On considère d'abord le montage de la figure 3(a) faisant intervenir les condensateurs de capacités C_1 et C_2 .

I.1.1.1. Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{v_2}{v}$.

I.1.1.2. Donner le nom de ce montage et indiquer son intérêt. Quelle relation existe entre les phases de $v_2(t)$ et $v(t)$?

I.1.2. On considère maintenant le montage de la figure 3(b), faisant intervenir en amont du montage précédent un résistor de résistance R et une bobine d'inductance L .

I.1.2.1. Déterminer l'expression de l'impédance complexe \underline{Z} formée par la bobine d'inductance L et les deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 .

I.1.2.2. Montrer que la fonction de transfert complexe $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{v_2}{v_1}$, peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{j\omega b} + j\omega d}$$

Expliciter les coefficients a , b et d en fonction de R , L , C_1 et C_2 .

Déterminer les dimensions des coefficients a , b et d .

I.2. Étude d'un oscillateur à amplificateur linéaire intégré A.L.I (ou amplificateur opérationnel : AO)

On considère maintenant le montage de la figure 4. Dans ce montage, l'amplificateur linéaire intégré est supposé parfait et en régime linéaire ; R_1 et R_2 sont les résistances de deux résistors.

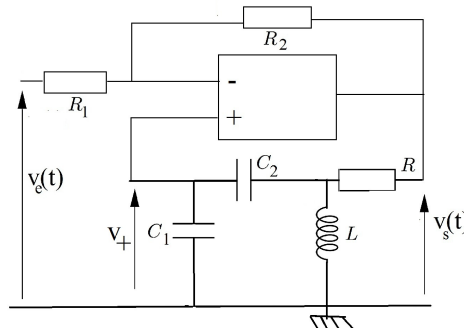


Figure 4 – oscillateur à ALI

I.2.1. Quelles hypothèses fait intervenir la supposition que l'ALI est parfait et en régime linéaire ?

I.2.2. Déterminer, en régime sinusoïdal permanent, la relation entre v_e et v_s faisant intervenir R_1 , R_2 et $H_2(j\omega)$.

On relie maintenant R_1 à la masse, ce qui revient à poser $v_e = 0$.

On admet, sous certaines conditions, que ce montage est un oscillateur et que la tension $v_s(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω_0 .

I.2.3. Exprimer la condition d'oscillation par une relation entre R_1 , R_2 , C_1 et C_2 .

I.2.4. Déterminer la pulsation d'oscillation ω_0 en fonction de L et C' , où C' est une capacité à exprimer en fonction de C_1 et C_2 .

I.3. Étude d'un oscillateur à fréquence modulée

Pour réaliser un oscillateur à fréquence modulée, on branche une diode à capacité variable, appelée aussi varicap, en parallèle avec la bobine d'inductance L .

Aucune connaissance sur la varicap n'est exigée, seulement qu'on l'assimile à un condensateur dont la capacité $C(s)$ est fonction d'une grandeur s susceptible de varier avec le temps. La capacité $C(s)$ varie avec s selon la loi : $C(s) = A.s^n$, où A et n sont deux constantes positives.

Le montage de la figure 3(b) est alors modifié, et son nouveau schéma est représenté en figure 5(a)

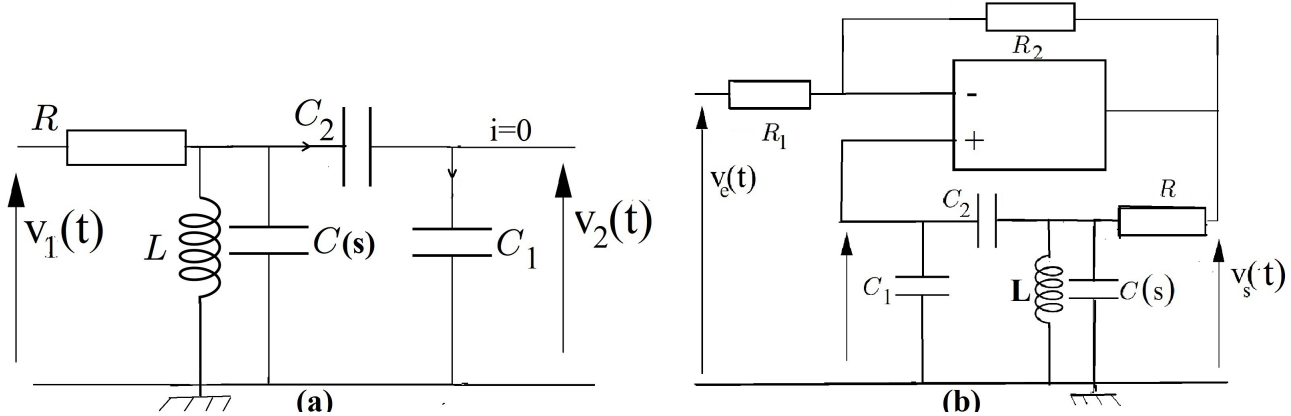


Figure 5 – (a) : filtre passif à varicap ; (b) : oscillateur à fréquence modulée

I.3.1. Montrer que la fonction de transfert du filtre 5(a) peut s'écrire sous la forme :

$$H_3(j\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{a' + \frac{1}{j\omega b'} + j\omega d'} ; \text{ et expliciter les coefficients } a', b' \text{ et } d' \text{ en fonction de } R, L, C_1, C_2 \text{ et } C(s).$$

On reprend le montage de la figure 4, après introduction du condensateur $C(s)$, on obtient le montage de la figure 5(b), dans lequel $v_e = 0$.

I.3.2. On fixe s à la valeur constante S_0 , pour laquelle $C(s = S_0) = C_0$. Exprimer la pulsation ω_{0s} de l'oscillateur en fonction de L , C_1 , C_2 et C_0 .

I.3.3. On impose maintenant $s(t) = S_0 + \varepsilon \cdot \cos(\alpha t)$, où ε et α sont deux constantes positives.

I.3.3.1. Sachant que $\varepsilon \ll S_0$, établir l'expression approchée au premier ordre de $C(t)$.

I.3.3.2. En déduire l'expression de la pulsation instantanée $\omega_s(t)$ de l'oscillateur.

I.3.3.3. On convient de poser $\omega_s(t) = \omega_{0s} \cdot (1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_{0s}} \cdot \cos(\omega t))$.

Déduire les expressions de ω et du taux de modulation $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_{0s}}$.

I.4. Étude d'un démodulateur de fréquence

On considère le montage de la figure 6, où les trois AO (1,2 et 3) sont supposés idéaux et en régime linéaire. La tension $u_e(t)$ est de la forme $u_e(t) = U_m \cdot \sin(\omega t)$ et la pulsation ω est supposée constante (sauf dans la question I.4.5).

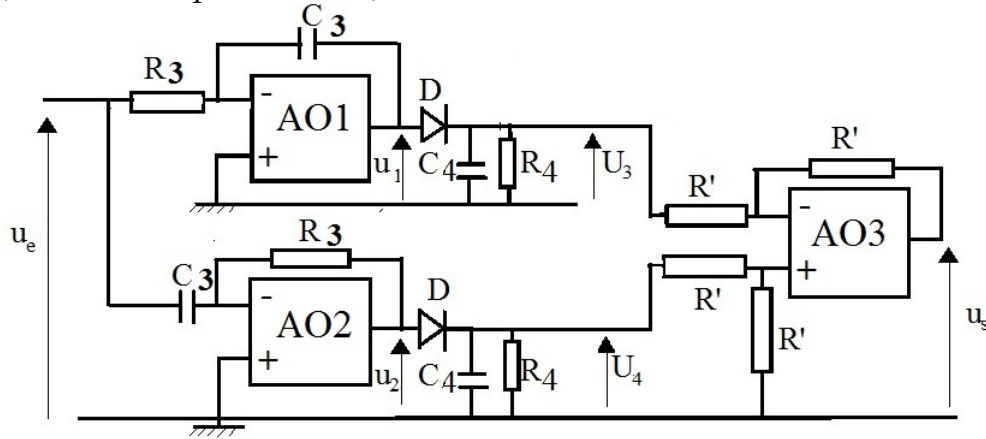


Figure 6 – montage démodulateur de fréquence

- I.4.1. Déterminer les expressions des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
- I.4.2. La diode D est idéale, les éléments C_4 et R_4 sont tels que $R_4 C_4 \omega \gg 1$, on peut admettre que l'ensemble joue le rôle de détecteur de crête ou d'amplitude; et $R_4 \ll R'$.
Donner les valeurs des tensions continues U_3 et U_4 .
- I.4.3. Exprimer la tension de sortie u_s en fonction de U_3 et U_4 .
- I.4.4. On pose $\omega_0 = \frac{1}{R_3 C_3}$, montrer que la tension u_s s'écrit : $u_s = U_m \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$.
On considère $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$ et on pose $\gamma = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$.
Exprimer u_s en fonction de γ , en faisant un développement limité à l'ordre 2.
- I.4.5. On admet que les résultats précédents restent valables lorsque la pulsation ω varie légèrement dans le temps autour de ω_0 , le montage étudié est un démodulateur de fréquence.
Quelle condition doit satisfaire γ pour qu'il soit linéaire à 1% : $u_s = k \cdot \Delta f$, où k est une constante à exprimer en fonction de U_m et de la fréquence f_0 ?

II^{ème} problème : suspension d'une voiture ; couplages et oscillations

Dans le référentiel terrestre galiléen $R(OXYZ)$, on étudie le mouvement du châssis d'une voiture, assimilé à un solide (S) de masse M , de centre de masse G et de moment d'inertie I par rapport à l'axe horizontal GX . Dans tout le problème, le mouvement de (S) s'effectue dans le plan YZ , et ce solide admet le plan $x = 0$ comme plan de symétrie. Soit $R'(GXY'Z')$ un référentiel lié au solide.

Le mouvement de ce solide est décrit par $G(0, y(t), z(t))$ et par l'angle $\theta = (\overrightarrow{GY}, \overrightarrow{GY'})$. Le mouvement de la voiture s'effectue sur sol horizontal avec une vitesse horizontale $v_y = \dot{y}$ constante. A l'arrêt G est situé sur l'axe OY donc $z = 0$. Voir figure 7.

La suspension de (S) est assimilée à deux ensembles de ressorts-amortisseurs visqueux de masse négligeable et supposés verticaux. Les éléments avant et arrière de (S) sont affectés des indices 1 et 2 respectivement. La force $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}_z$ appliquée en A_i , par le ressort-amortisseur, est verticale $F_{i,z} = N_i - k_i \cdot z_i - h_i \cdot \dot{z}_i$, $i = 1, 2$ et z_i est l'ordonnée de A_i avec $z_{i,e} = 0$ à l'équilibre; les quantités N_i, k_i, h_i sont des constantes.

On supposera toujours $z, z_1, z_2, \theta, \dot{z}, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{\theta}, \ddot{z}, \ddot{z}_1, \ddot{z}_2, \ddot{\theta}$ (élongations, vitesses et accélérations) des infiniments petits de même ordre; $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$. On donne : $M = 10^3 \text{kg}$, $l_1 = GA_1 = 1,30\text{m}$, $l_2 = A_2G = 1,70\text{m}$ et $A_2A_1 = l$; on pose $\lambda_1 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$ et $\lambda_2 = \frac{l_1}{l_1+l_2}$.

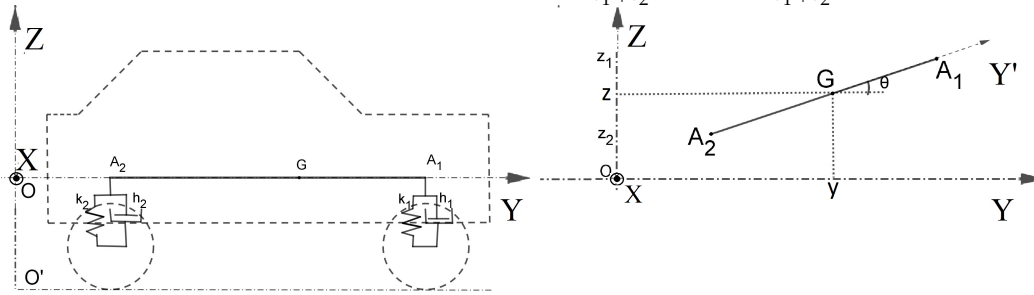


Figure 7 – étude des mouvements du châssis : translation verticale et rotation

II.1. Préliminaires

II.1.1. Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z et θ .

II.1.2. Exprimer z et θ en fonction de z_1 et z_2 .

II.1.3. Exprimer les réactions normales N_1 et N_2 à l'équilibre; puis calculer leur valeur.

II.2. A l'aide des théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique, écrire les équations différentielles du mouvement, projetées, dans les deux situations suivantes :

II.2.1. En utilisant les paramètres z_1 et z_2 : équations notées, respectivement, (I) et (II).

II.2.2. En utilisant les paramètres z et θ : équations notées, respectivement, (III) et (IV).

II.3. On cherche des solutions de la forme $z_1 = Z_1 \cdot e^{j\omega t}$ et $z_2 = Z_2 \cdot e^{j\omega t}$ avec Z_1, Z_2, ω des complexes.

II.3.1. Montrer que les équations (I) et (II) permettent d'obtenir le système :

$$\begin{cases} (a(\omega) + j.b(\omega)).Z_1 + (c(\omega) + j.d(\omega)).Z_2 = 0 \\ (a'(\omega) + j.b'(\omega)).Z_1 + (c'(\omega) + j.d'(\omega)).Z_2 = 0 \end{cases}$$

Expliciter les grandeurs réelles $a(\omega), b(\omega), c(\omega), d(\omega), a'(\omega), b'(\omega), c'(\omega)$ et $d'(\omega)$.

II.3.2. Écrire l'équation $P(\omega) = 0$ donnant les pulsations complexes ω , sans développer le polynôme $P(\omega)$.

II.3.3. Si on prend $I = M.l_1.l_2$, donner la nouvelle expression $P_c(\omega)$ de $P(\omega)$, sans développer les calculs.

II.4. On cherche des solutions de la forme $z = Z \cdot e^{j\omega t}$ et $\theta = \theta_0 \cdot e^{j\omega t}$, avec Z, θ_0, ω des complexes.

II.4.1. Écrire, sans les résoudre, les deux équations homogènes vérifiées par Z et θ_0 .

II.4.2. Montrer que si on adopte les conditions $k_1 l_1 = k_2 l_2$ et $h_1 l_1 = h_2 l_2$ alors le couplage entre z et θ disparaît.

Dans la suite, on suppose les frottements visqueux négligeables $h_1 = h_2 = 0$, et on étudie toujours les variables z et θ , dans le cas général.

II.4.3. Écrire le polynôme donnant les pulsations propres possibles solutions d'un régime sinusoïdal, en fonction de $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1.l_1^2+k_2.l_2^2}{I}}$ et $\alpha = \frac{l_2.k_2-l_1.k_1}{\sqrt{M.I}}$.

II.4.4. Montrer que la condition $\alpha = 0$ permet une solution double, et exprimer alors le rapport $\frac{I}{M}$ en fonction des paramètres l_1 et l_2 .

II.4.5. Donner la solution double ω_0 en fonction de ω_1 ou ω_2 .

II.4.6. On donne $\omega_0 = 4\pi \text{rad.s}^{-1}$, calculer littéralement et numériquement I, k_1, k_2 .