- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

L'énergie électrique : centrale hydroélectrique

La prise électrique que nous connaissons tous, est l'aboutissement de tout un réseau de production et de transport de l'énergie électrique. Dans ce problème, on propose d'étudier de façon simplifiée le fonctionnement de quelques parties d'une centrale hydroélectrique. L'énergie hydraulique est transformée en énergie mécanique, par une turbine qui entraine un alternateur, lequel produit de l'électricité.

Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes.

1. Questions préliminaires : statique des fluides

On considère un fluide homogène incompressible de masse volumique μ_f au repos dans un référentiel $R(O,x,y,z,t)$ supposé galiléen. Un point M du fluide est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans le référentiel (R) auquel on associe la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. L'axe Oz coïncide avec la verticale ascendante et la côte $z=0$ est prise au niveau de la surface du fond du fluide de hauteur h_f. On désigne par $P(M)$ la pression au point M et P_0 celle à la surface libre du fluide. Dans cette étude, le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}=-g\vec{e}_z$ est supposé uniforme.

1.1. Qu'appelle-t-on un fluide homogène incompressible ?

1.2. Justifier que la dimension de la pression dans le système international est : $[P]=ML^{-1}T^{-2}$, où M , L et T sont les dimensions respectives de la masse, de la longueur et du temps.

1.3. On considère une particule élémentaire de fluide de forme parallélépipédique de volume $d\tau=dxdydz$. Montrer que la force de pression qui s'exerce sur cette particule s'écrit : $d\vec{F}_{pres}=-\overrightarrow{grad}(P)d\tau$. Écrire la condition d'équilibre de cette particule dans le référentiel (R) .

1.4. En déduire l'équation locale du fluide en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre. Quelle est la nature des surfaces isobares ?

1.5. Exprimer la pression $P(M)$ à la côte z .

1.6. On tient compte dans cette question de la variation de la masse volumique μ_f du fluide avec la pression. Le fluide est de l'eau supposée en équilibre isotherme. Sa masse volumique varie avec la pression selon la loi :

$\mu_f = \mu_0(1+\alpha(P-P_0))$ où $\alpha = 1{,}0.10^{-10}\,Pa^{-1}$, $\mu_0 = 1{,}0.10^3\,kg.m^{-3}$ et $P_0 = 1{,}0.10^5\,Pa$. On donne $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$.

1.6.1. Établir l'expression de la pression $P(M)$ à la côte z .

1.6.2. Que devient cette loi pour des profondeurs faibles ?

1.6.3. Calculer les valeurs de pression exacte et approchée au niveau de la surface du fond pour $h_f = 100\,m$. Conclusion.

1.6.4. Quelle erreur relative commet-on, quand on assimile l'eau à un fluide incompressible ?

Dans la suite, le fluide est l'eau que l'on suppose homogène, incompressible et en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre uniforme. Sa masse volumique est $\mu_f = \mu_0$.

2. Barrage-poids

L'eau de hauteur h_f est retenue par un barrage-poids de coupe transversale triangulaire (figure 1). Le parement amont du barrage (face côté eau) est un rectangle vertical de hauteur H_b . Le parement aval (face côté air) est incliné. On effectuera les calculs en considérant la coupe triangulaire du barrage. On note e_b la largeur de base du barrage. Afin de simplifier les calculs, on prendra $h_f = H_b$.

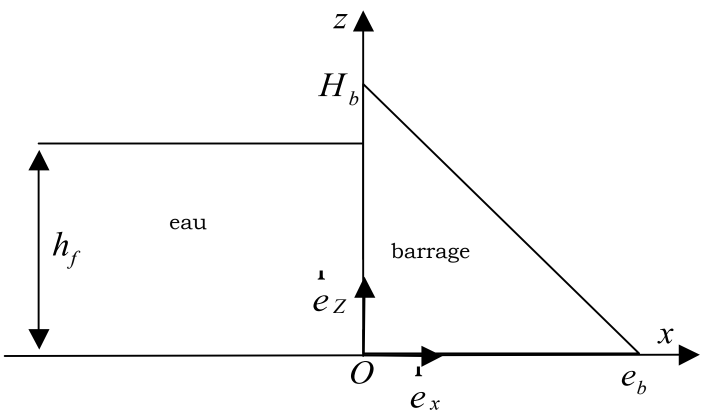

figure 1

Le matériau constituant le barrage est homogène et a pour masse volumique $d\mu_0$ où d est la densité du matériau par rapport à l'eau. On supposera que seule la pression effective intervient (autrement dit, la pression atmosphérique est prise comme référence nulle).

Le barrage est soumis aux trois forces :

- les forces de pression de résultante $\vec{F}_{pres}$ exercées par l'eau ;
- le poids $\vec{P}$ du barrage ;
- la réaction $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_z\vec{e}_z$ du sol.

La composante verticale R_z de la force exercée par le sol sur le barrage est de la forme : $\dfrac{dR_z}{dx} = ax + b$, où a et b sont des paramètres que l'on déterminera.

2.1. Établir l'expression des deux résultantes $\vec{F}_{pres}$ et $\vec{P}$.

2.2. En écrivant une première condition d'équilibre du barrage, déduire la composante horizontale R_x des forces exercées par le sol sur le barrage et une relation entre a et b .

2.3. Calculer, en O , le moment $\vec{M}_{pres}(O)$ des forces de pression de l'eau, le moment $\vec{M}_{pes}(O)$ des forces de pesanteur et le moment de la composante R_z .

2.4. En écrivant une deuxième condition d'équilibre du barrage, déterminer une autre relation entre a et b .

2.5. Achever la détermination des paramètres a et b en fonction de μ_0, d, e_b, h_f et g.

2.6. Quel est le signe de $\frac{dR_z}{dx}$ qui convient pour que le barrage ne se soulève pas ? En déduire une condition entre d, e_b et h_f.

3. Écoulement dans une conduite

On étudie dans cette partie la distribution de vitesse et de pression dans la conduite entre le barrage et la turbine et on examine le rôle de l'injecteur. L'eau du lac artificiel, retenue par le barrage, alimente une centrale hydroélectrique située à la sortie d'une conduite (figure 2). La conduite cylindrique, de section $S = 3m^2$ achemine l'eau du lac jusqu'à la turbine de la centrale. Elle a son départ situé à $H - h = 40m$ en dessous de la surface libre de l'eau et se termine horizontalement à $H = 100m$ en dessous de cette surface par un injecteur (tubulure de section décroissante, figure 3) de section $S' = 2m^2$.

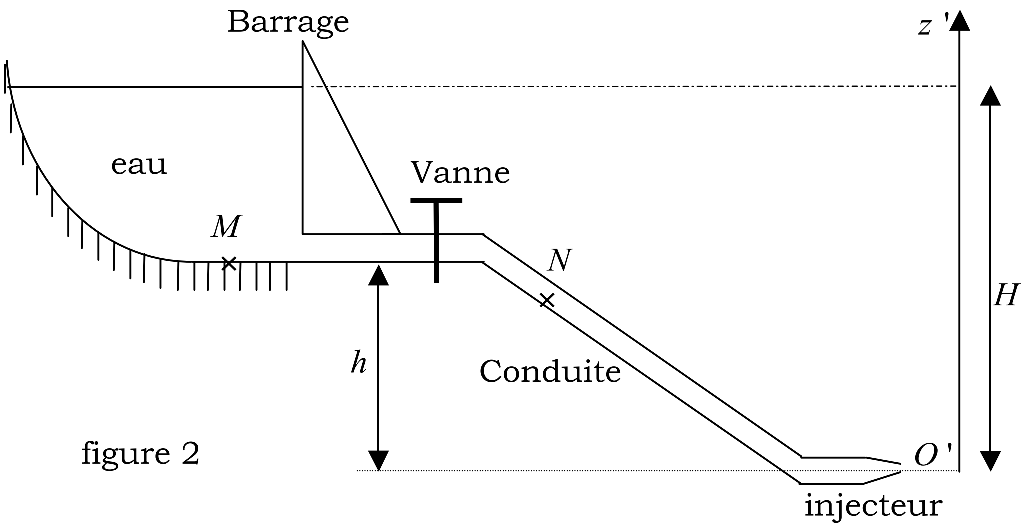

figure 2

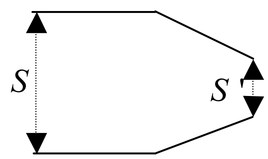

figure 3

On négligera la variation du niveau d'eau du lac au cours de l'écoulement supposé permanent et on néglige tout frottement. La pression dans le jet à la sortie de l'injecteur est égale à P_0. Le niveau de référence ($z' = 0$) est la sortie de la conduite.

3.1. On rappelle que le long d'une ligne de courant, le fluide satisfait à la relation de Bernoulli : $p + \mu_0 \frac{v^2}{2} + \mu_0 g z' = cste$. Préciser la signification des différents termes de cette relation ainsi que les conditions de sa validité. On suppose ces conditions vérifiées.

3.2. On ferme la vanne située à la sortie du barrage. Calculer littéralement et numériquement la pression $P(M)$ en un point M situé au fond du lac.

3.3. On ouvre maintenant la vanne. L'eau s'écoule à la sortie de la conduite, dans l'air dont la pression est P_0.

3.3.1. En utilisant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant convenablement choisie, exprimer la vitesse v_s de l'eau à la sortie de l'injecteur où l'eau se retrouve à la pression atmosphérique P_0. Calculer numériquement la vitesse v_s.

3.3.2. Exprimer le débit massique D_m de l'eau et calculer sa valeur numérique.

3.3.3. Écrire l'équation de continuité dans les conditions de l'écoulement. En déduire l'expression de la vitesse $v_s^{'}$ de l'eau en un point situé avant la sortie de l'injecteur. Calculer sa valeur numérique. Que vaut la vitesse en d'autres points de la conduite ?

3.3.4. En utilisant la relation de Bernoulli, déterminer littéralement la pression $P(N)$ au un point N de la conduit de côte z'. Tracer l'allure de la courbe donnant $P(N) = P(z')$.

3.3.5. Calculer littéralement et numériquement l'altitude h' de l'entrée de la conduite pour laquelle la pression s'annulerait.

3.3.6. Comparer h' et h. Conclure.

3.4. Afin d'examiner le rôle de l'injecteur, on suppose maintenant que la conduite n'est pas terminée par l'injecteur.

3.4.1. Quelle serait la vitesse à la sortie de la conduite dans ce cas ?

3.4.2. En utilisant la relation de Bernoulli, calculer littéralement et numériquement la nouvelle altitude h'' de l'entrée de la conduite pour laquelle pression s'annulerait.

3.4.3. Conclure sur la nécessité de l'injecteur à la sortie de la conduite.

4. La turbine Pelton

Une turbine Pelton est formée de récipients appelés augets fixés sur une roue de rayon utile R très grand devant la taille des augets. À la sortie de l'injecteur, le jet d'eau de vitesse V_j et de section droite S_j, frappe les augets d'une roue et met cette dernière en rotation la vitesse angulaire ω.

En adoptant un modèle optimisé de turbine en régime permanent, on montre que la puissance P_m transmise à la turbine par les forces exercées par les jets est donnée par : $P_m = K\mu_0 S_j V_j^2 R\omega\left(1 - \dfrac{R\omega}{V}\right)$, où K est un coefficient sans dimension.

4.1. Vérifier l'homogénéité de l'expression donnant P_m.

4.2. Représenter l'allure de P_m en fonction de ω. Préciser le domaine possible pour ω.

4.3. Préciser la valeur de ω qui optimise la puissance transmise à la turbine.

5. Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : principe d'un alternateur

Grâce à l'énergie fournie par la turbine, l'alternateur produit un courant électrique alternatif. Le phénomène d'induction électromagnétique permet de comprendre le fonctionnement de ce dispositif. On étudie dans cette partie le principe de l'alternateur. On représente le rotor (partie mobile) de l'alternateur comme une bobine plate (B) de N spires rectangulaires de centre O, de surface S' chacune et d'axe orienté par la normale $\vec{n}$ (figure 4). La bobine tourne autour de son axe de symétrie (Oz) passant par les deux milieux de côtés opposés avec une vitesse angulaire constante Ω dans une région de l'espace où règne un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$ homogène uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe de rotation. On néglige le champ magnétique propre créé par les courants induits dans la bobine (B) de résistance R devant le champ extérieur $\vec{B}_e$.

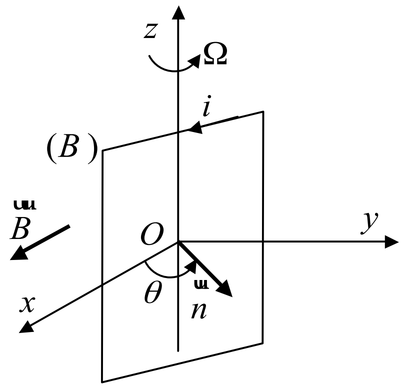

figure 4

On prendra à la date $t=0$, $\vec{B}_e = B_0\vec{e}_x$ et la normale à la bobine parallèles et de même sens.

5.1. Exprimer le flux magnétique Φ embrassé par les spires de la bobine (B).

5.2. En déduire l'expression de la force électromotrice e induite par le mouvement de la bobine et donner sa valeur maximale e_M.

5.3. Établir l'expression du courant i induit dans la bobine et donner sa valeur maximale I_M.

5.4. Établir l'expression du couple électromagnétique $\vec{\Gamma}_L$ des forces de Laplace exercées sur la bobine. Calculer sa valeur moyenne dans le temps $<\vec{\Gamma}_L>$.

5.5. Établir l'expression de la puissance P_J dissipée par effet Joule dans la bobine. Calculer sa valeur moyenne $<P_J>$.

5.6. Déterminer l'expression du couple $\vec{\Gamma}$ suivant l'axe (Oz) qu'il faut exercer pour maintenir la rotation de la bobine et calculer sa valeur maximale Γ_M.

6. Ligne haute tension et pertes en ligne

On étudie dans cette partie la nécessité d'utiliser des lignes de hautes tensions pour le transport de l'énergie électrique. On souhaite fournir à un utilisateur, situé à l'extrémité d'une ligne bifilaire de longueur $l = 50km$, une puissance $P = 10MW$ avec moins de 10% de pertes sous une tension alternative de valeur efficace U. On note I l'intensité du courant dans les câbles acheminant l'électricité. Le facteur de puissance du récepteur est $\cos(\varphi) = 1$. On donne la résistivité du cuivre : $\rho = 1{,}6.10^{-8}\Omega.m$.

6.1. On modélise chaque câble de la ligne bifilaire par un conducteur ohmique cylindrique en cuivre, de résistivité ρ, de longueur l et de section s. Rappeler l'expression de la résistance R d'un tel conducteur.

6.2. Donner l'expression de la puissance utile P_u acheminée par la ligne.

6.3. Exprimer la puissance P_J dissipée par effet Joule dans les câbles.

6.4. En déduire l'expression de la résistance R des câbles en fonction de P_u, P_J et U.

6.5. Calculer la résistance R et la section s des câbles pour $U = 220V$, puis pour $U = 200kV$. Conclure sur l'utilisation de la haute tension pour minimiser les pertes.

6.6. Afin d'augmenter la tension et de diminuer l'intensité dans la ligne, on utilise deux transformateurs de tension, un en élévateur (après l'alternateur) et un en abaisseur (à la réception).

6.6.1. Quel type de conversion réalise un transformateur ?

6.6.2. Expliquer brièvement son principe.

7. Transport de l'énergie électrique en courant continu

Le courant alternatif est aujourd'hui la technologie la plus utilisée pour transporter l'électricité en haute et très haute tension. Pour certaines interconnexions et pour les lignes aériennes, souterraines ou sous-marines au-delà d'une certaine longueur, on doit transporter l'électricité en courant continu plutôt qu'en courant alternatif.

On étudie dans cette partie un de ces câbles de transport d'énergie reliant deux stations de conversion distantes de $d = 50km$ et on montre l'intérêt d'utiliser du courant continu pour le transport d'énergie électrique à distance par câble. Ce câble est constitué d'une âme centrale en cuivre entouré d'un isolant (papier imprégné). Pour assurer l'étanchéité et la tenue mécanique du câble, ce dernier est entouré d'une armature.

On donne :

- Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi.10^9} F.m^{-1}$.
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$.
- Résistivité du cuivre : $\rho = 1,6.10^{-8} \Omega.m$.
- Inductance linéique du câble : $\Lambda = 0,4 mH.km^{-1}$.
- Épaisseur de peau : $\delta = \sqrt{\dfrac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$.
- Section de l'âme centrale $S_a = 900 mm^2$.

7.1. On veut faire circuler un courant continu d'intensité $I = 925\,A$ dans l'âme d'un conducteur.

7.1.1. Calculer numériquement la résistance totale R_a du conducteur central du câble étudié ?

7.1.2. Quelle est la puissance P_{Ja} dissipée par l'âme du câble ?

7.2. On considère maintenant que le courant transporté est alternatif de fréquence f.

7.2.1. Calculer l'épaisseur de peau δ pour le cuivre pour la fréquence $f_1 = 50Hz$ puis pour $f_2 = 100MHz$. En déduire si la résistance du conducteur est modifiée.

7.2.2. Exprimer, en fonction de l'épaisseur de peau δ et du rayon R_i du conducteur central, la section utile S_{au} du conducteur. On admet qu'en première approximation, le courant circule dans une épaisseur $\delta << R_i$ à la périphérie du conducteur.

7.2.3. En déduire la résistance effective R_e de la ligne électrique et les pertes P_{Ja} par effet Joule dans la ligne. Calculer leur valeur numérique.

7.3. Calculer l'inductance totale L du câble puis sa réactance $X_L = L\omega$ à la fréquence $f = 50Hz$. Que vaut cette réactance en continu ?

7.4. L'âme et l'armature, séparées par l'isolant, forment les deux faces d'un condensateur cylindrique de capacité par unité de longueur $\Gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{Ln\left(\dfrac{R_e}{R_i}\right)}$, R_i et $R_e = 33{,}5mm$, respectivement, les rayons intérieurs et extérieurs de la partie isolante. $\varepsilon_r = 4$ est la permittivité relative de l'isolant en papier imprégné. Calculer la capacité totale C du condensateur que constitue le câble.

7.5. On modélise le câble par le circuit de la figure 6. Ce câble est alimenté en alternatif par la tension efficace $U_{eff} = 190\,kV$ à la fréquence $f = 50\,Hz$ délivrée par un générateur branché entre l'âme la terre. L'armature est reliée à la terre.

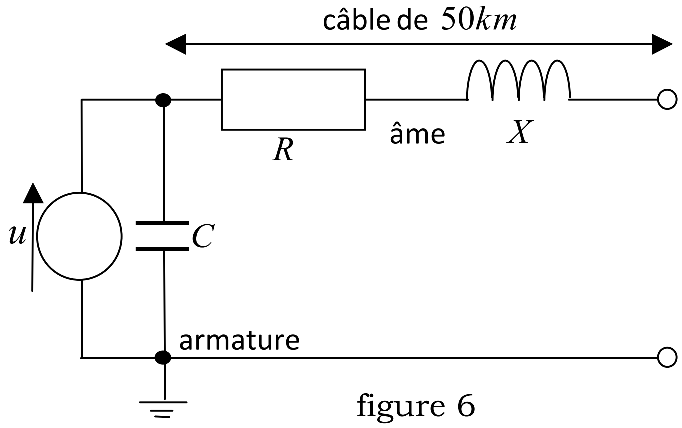

figure 6

figure 6

7.5.1. Calculer, à partir de ce modèle, l'intensité du courant I' appelé par le câble à vide (l'autre extrémité n'appelant aucune puissance). Ce courant est-il utile pour le transport d'énergie ?

7.5.2. Donner le modèle du câble en continu. Expliquer pourquoi il est nécessaire d'alimenter le câble en courant continu.

7.5.3. On alimente maintenant le câble en continu sous la tension $U = 270\,kV$ ($U = U_{eff}\sqrt{2}$). Calculer la puissance que ce câble peut transporter quand il est parcouru par le courant $I = 925\,A$. On négligera toutes les pertes

7.5.4. Calculer le rapport des pertes par effet Joule par rapport à la puissance transportée. Commenter.