

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.

L'épreuve est composée de deux parties indépendantes, à l'intérieur desquelles de nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

La partie 1 est notée sur **4 points**, la partie 2 sur **16 points**.

## Partie 1

### Principe du moteur à courant continu

Un moteur à courant continu est un système permettant de convertir une énergie électrique d'entrée en une énergie mécanique de sortie. On considère le modèle simplifié du premier moteur électrique à courant continu imaginé et mis en œuvre par le mathématicien et physicien anglais Peter BARLOW en 1828, la roue de BARLOW.

On modélise la roue par un disque conducteur homogène fermé par un fil électrique issu de son centre  $O$  et par un contact avec un bain de mercure en un point  $I$  situé sur sa circonférence sur un générateur de tension  $U$  continue et une résistance  $R$  via un interrupteur  $(K)$ . La roue est libre de tourner dans le plan vertical à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  et est placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire  $\vec{B} = -B \vec{e}_z$  orienté normalement au disque (figure 1).

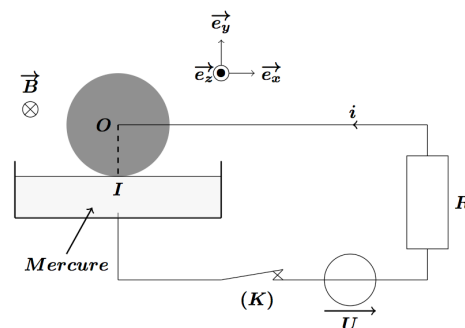


figure 1 - Roue de BARLOW

On note  $a$  le rayon du disque et  $J$  son moment d'inertie par rapport à son axe  $(Oz)$ . Afin de simplifier l'étude, on suppose que le courant arrive en  $O$  et qu'il quitte la roue au point  $I$  en circulant en ligne droite.

On néglige la résistance du disque et celle du générateur. On néglige l'inductance propre du circuit.

Le référentiel du laboratoire  $(\mathcal{R}) = (0, x, y, z)$  muni de la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est

supposé galiléen.

1. La roue est initialement immobile. À l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur ( $K$ ). Prévoir, en le justifiant, le sens de rotation de la roue.
2. Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  d'un point  $M$  du segment  $OI$ , situé à la distance  $r = \|\overline{OM}\|$  du centre  $O$ , en fonction de  $\omega$  et  $r$ . En déduire le champ électromoteur  $\vec{E}_m(M)$ , dit de Lorentz au point  $M$ .
3. En exprimant la circulation de  $\vec{E}_m(M)$  entre le point  $O$  et le point  $I$ , calculer la force électromotrice induite  $e_{OI}$ . On posera dans la suite  $e_{OI} = -k_e \omega$ , où  $k_e$  est une constante positive que l'on exprimera en fonction des données.
4. Exprimer la force élémentaire de Laplace  $d\vec{F}_L$  qui s'exerce sur un élément  $d\vec{r}$  de la ligne du courant  $OI$ . Exprimer le moment résultant  $\vec{M}_{O,L}$  des forces de Laplace agissant sur la roue. On posera dans la suite  $\vec{M}_{O,L} = k_e i \vec{e}_z$ .
5. La roue est soumise à l'action des forces de frottement. Lorsque la vitesse angulaire de rotation de la roue passe de 0 à  $\omega$  positive, le moment de ces forces peut être modélisé par  $M_f = -M_0 - \gamma \omega$ , où  $M_0$  et  $\gamma$  sont des constantes positives.
  - 5.1. Déterminer la condition sur la tension  $U$  pour que la roue se mette en rotation avec une vitesse angulaire  $\omega$  positive. On suppose que cette condition est satisfaite dans la suite.
  - 5.2. Appliquer à la roue le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation. En déduire l'équation mécanique régissant le mouvement de la roue.
6. Le schéma électrique équivalent au système étudié est donné par la figure 2. Appliquer la loi des mailles dans le circuit électrique équivalent et en déduire l'équation électrique du système étudié.
7. À partir des deux équations, mécanique et électrique, montrer que l'équation d'évolution de la vitesse angulaire  $\omega$  se met sous la forme :

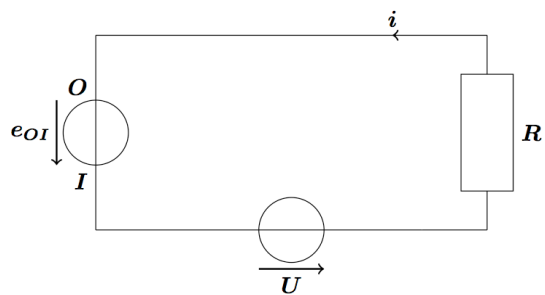


Figure 2

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_l}{\tau}$$

Donner l'expression de  $\tau$  et celle de  $\omega_l$  en fonction des données

8. Donner la solution  $\omega(t)$ . Interpréter le résultat.
9. On suppose que le régime permanent est établi. Établir l'expression de la puissance fournie par la source de tension. Sous quelle forme cette puissance est-elle convertie ?
10. Calculer la puissance du moteur ainsi constitué lorsque la roue effectue  $n$  tours par seconde.

## Partie 2

### Étude d'un gyropode

Le Segway est un gyropode électrique écologique et fashion qui diminue la congestion routière, les émissions de gaz à effet de serre et la consommation de carburant. Véritable bijou technologique, il est constitué d'une plate-forme munie de deux roues parallèles indépendantes sur laquelle l'utilisateur se tient debout en se tenant à un manche de maintien et de conduite (figure 3). Il faut juste incliner le guidon d'un côté ou de l'autre pour tourner, et pour faire avancer ou reculer l'engin. Le basculement du guidon vers l'avant permet de déclencher une phase d'accélération et vers l'arrière une phase de décélération. À l'arrêt, l'équilibre est obtenu sans que l'utilisateur ne pose le pied à terre.

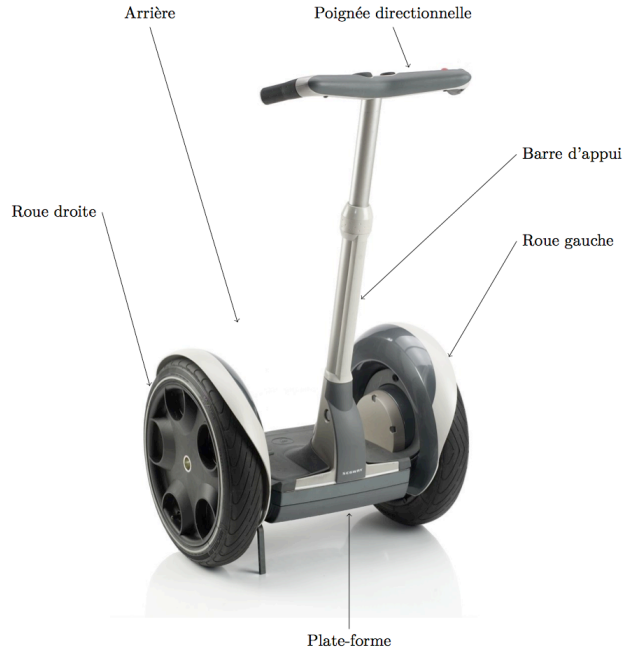


Figure 3

Le sujet de cette partie s'intéresse à l'étude des différents éléments entrant dans la constitution de ce véhicule électrique.

#### 1. Détermination de la constante de f.é.m. du moteur

Le moteur de traction de chacune des deux roues du véhicule utilisé est à aimants permanents, donc à excitation indépendante. Le modèle de THEVENIN équivalent à l'induit du moteur est caractérisé par une f.é.m.  $E = -k'_e n$  en série avec une résistance  $R = 45m\Omega$ .  $k'_e$  est la constante de f.é.m. du moteur et  $n$  est sa fréquence de rotation (en  $tr.min^{-1}$ ). Le schéma équivalent de l'induit du moteur est donné par la figure 4.

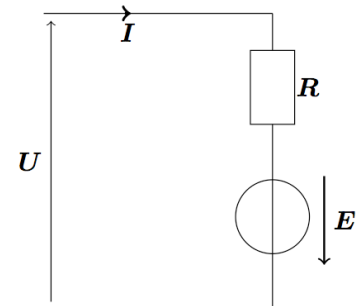


Figure 4

- 1.1. Préciser l'inducteur et son rôle pour le moteur à courant continu utilisé dans ce véhicule.
- 1.2. Les caractéristiques nominales du moteur de traction de chaque roue sont données dans le tableau ci-dessous. On mesure une force électromotrice  $E = -20V$ .

Tension d'induit nominale	$U_N = 24V$
Intensité nominale du courant dans l'induit	$I_N = 90A$
Tension d'excitation nominale	$U_{exN} = 108V$
Intensité nominale du courant dans l'inducteur	$I_{exN} = 1,5A$
Vitesse de rotation nominale	$n_N = 1500tr. \min^{-1}$
Puissance utile nominale	$P_{uN} = 1,73kW$

En supposant que le moteur fonctionne sous les conditions nominales, exprimer puis calculer numériquement :

- la constante  $k_e'$  ;
- la puissance totale absorbée par le moteur  $P_a$  ;
- le rendement du moteur,  $\eta_m$  ;
- la puissance perdue,  $P_p$ .

**1.3.** L'énergie électrique nécessaire au fonctionnement du véhicule étudié est fournie par deux batteries de tension  $U_0 = 24V$  associées en dérivation. Pour une durée de  $t_0 = 90min$  en conduite douce, le courant moyen débité par l'association des deux batteries est de  $I_0 = 40A$ .

Quelle doit être la capacité  $Q$  (en Ah) des batteries pour cette durée de fonctionnement ? La batterie dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-contre convient-elle ?

Capacité	33,3Ah
Durée de vie	> 1000 cycles
Temps de charge	8h
Température d'utilisation	-10 à 50°C

## 2. Étude du hacheur de tension alimentant le moteur

Pour pouvoir faire varier la fréquence de rotation du moteur donc la vitesse du gyropode, on interpose un hacheur entre la source de tension fixe (batteries embarquées) et l'induit du moteur. Le dispositif de la figure 5 est un hacheur de tension. Il alimente le moteur d'une des deux roues du véhicule.

L'interrupteur électronique unidirectionnel  $K$ , la diode  $D$  et l'inductance  $L$  sont supposés parfaits.

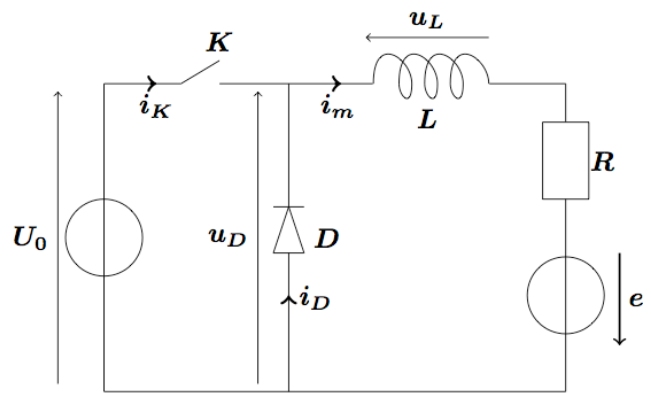


Figure 5

L'interrupteur  $K$  est commandé par une tension de commande de période de hachage  $T_h$  et de rapport cyclique  $\alpha$  :

$$u_{com}(t) = \begin{cases} +U_{com} = +15V & \text{pour } t \in [0, \alpha T_h] : K \text{ est fermé et } D \text{ est bloquée} \\ -U_{com} = -15V & \text{pour } t \in [\alpha T_h, T_h] : K \text{ est ouvert et } D \text{ est passante} \end{cases}$$

La tension de commande est élaborée à partir des signaux gérant la mise en marche du moteur et la variation de vitesse du moteur.

On donne la période de hachage  $T_h = 0,20ms$  et le rapport cyclique  $\alpha = 0,75$ .

- 2.1. Quel composant électronique peut-on utiliser comme interrupteur commandé  $K$  ?
- 2.2. Quels sont les rôles respectifs de l'inductance de lissage  $L$  et de la diode  $D$  ? Quel nom donne-t-on à la diode ?
- 2.3. Représenter sur votre copie l'allure, en fonction du temps, de la tension  $u_D$  aux bornes de la diode.
- 2.4. Le graphe de la figure 6 donne l'allure en fonction du temps de l'intensité du courant  $i_m(t)$  circulant dans l'induit du moteur.

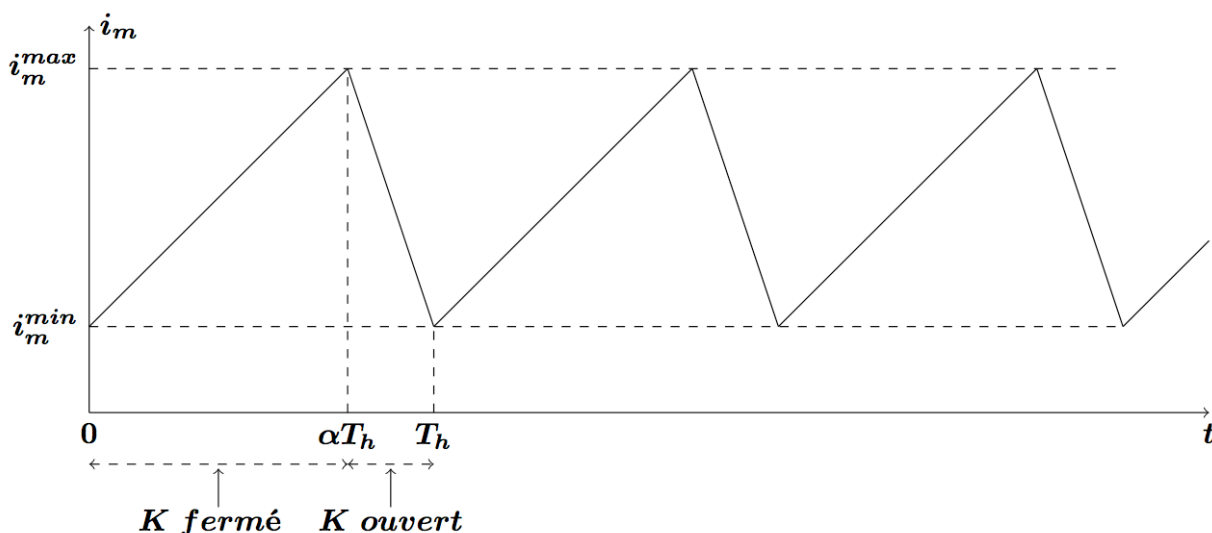


Figure 6 : ( $i_m^{min} = 45A$  et  $i_m^{max} = 55A$ ).

- 2.4.1. Donner le schéma équivalent du montage pour l'intervalle de temps  $[0, \alpha T_h]$  ? En déduire les courants  $i_K(t)$  et  $i_D(t)$  pour cet intervalle.
- 2.4.2. Donner le schéma équivalent du montage pour l'intervalle de temps  $[\alpha T_h, T_h]$  ? En déduire les courants  $i_K(t)$  et  $i_D(t)$  pour cet intervalle.
- 2.4.3. Reproduire l'allure de  $i_m(t)$  et représenter en concordance de temps la tension  $u_{com}(t)$  ainsi que les courants  $i_K(t)$  et  $i_D(t)$ .
- 2.4.4. Établir l'expression de la valeur moyenne  $U_{D,moy} = \langle u_D(t) \rangle$  de la tension  $u_D(t)$  en fonction de  $\alpha$  et  $U_0$  puis calculer sa valeur numérique.
- 2.4.5. Quel appareil utilise-t-on pour mesurer la valeur moyenne  $U_{D,moy}$ . Préciser le branchement de l'appareil utilisé et les réglages nécessaires (DC/AC et le calibre).
- 2.4.6. On souhaite visualiser à l'oscilloscope bi-courbe l'image des intensités des courants  $i_m$  et  $i_D$ . On dispose pour cela de deux résistances de même valeur  $r$ . Donner le schéma du montage. Comment faut-il choisir la résistance  $r$  pour ne pas perturber le fonctionnement du montage. Proposer une valeur pour  $r$ .

**2.4.7.** Expliquer brièvement le rôle du hacheur de tension étudié.

**3. Mise en marche et arrêt véhicule**

Un capteur d'inclinaison (ou Tilt sensor en anglais) est un composant électronique de petite taille et peu coûteux capable de changer d'état au delà d'un certain angle d'inclinaison. Le principe est simple, en position verticale le capteur se comporte comme un interrupteur normalement fermé, mais lorsque son inclinaison évolue au delà d'une certaine valeur, le contact mécanique (1 ou 2 billes ou du mercure) se déplace et ouvre le circuit.

Les amplificateurs opérationnels, supposés idéaux et de tensions de saturation  $\pm V_{sat} = \pm 15V$ , sont alimentés sous les tensions  $+V_{CC} = +15V$  et  $-V_{CC} = -15V$ .

**3.1. Mise en forme du signal issu du capteur**

Le capteur d'inclinaison mesure l'angle d'inclinaison  $\theta$  du tube de maintien du guidon par rapport à l'axe vertical (figure 7). Sa plage de mesure est limitée à l'intervalle  $[-10^\circ, +30^\circ]$ . L'équation de la caractéristique de l'inclinomètre est  $v(\theta) = -k\theta$  avec  $k = 0,03V/^\circ$ . Le capteur est inséré dans le montage de la figure 8.

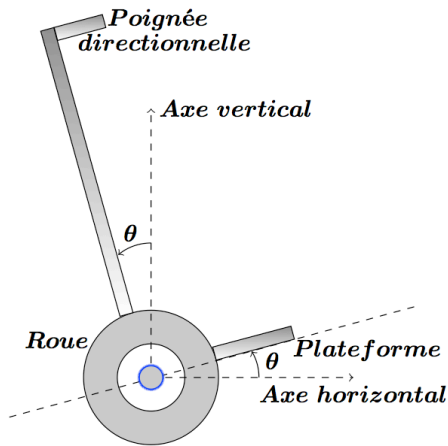


figure 7

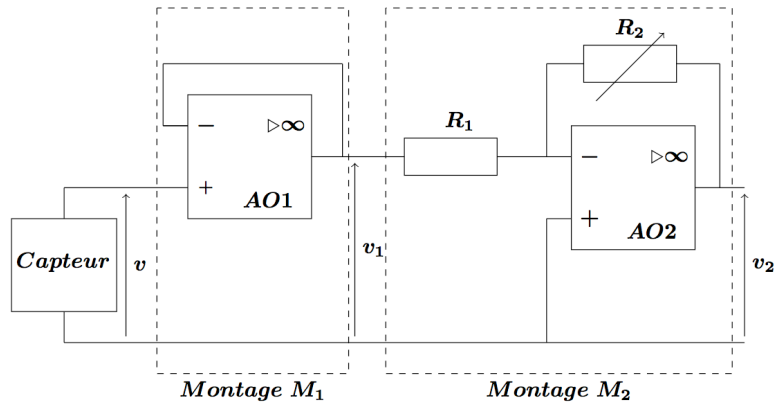


Figure 8

- 3.1.1.** Justifier que les deux montages  $M_1$  et  $M_2$  peuvent fonctionner en régime linéaire.
- 3.1.2.** Exprimer, dans ce régime de fonctionnement, la tensions  $v_1$  en fonction de  $v$  et la tension  $v_2$  en fonction de  $v_1$ . Comment nomme-t-on ces deux montages ? Expliquer brièvement leurs rôles respectifs.
- 3.1.3.** En déduire l'expression de  $v_2$  en fonction de l'angle  $\theta$ .
- 3.1.4.** Calculer la valeur de la résistance  $R_2$  pour avoir  $v_2 = +1,0V$  pour  $\theta = +2,0^\circ$ . On donne  $R_1 = 3k\Omega$ .
- 3.1.5.** Tracer l'allure de  $v_2 = v_2(\theta)$  dans l'intervalle  $[-10^\circ, +30^\circ]$ .
- 3.1.6.** Quelle est condition sur l'amplitude de  $v_1$  pour que le montage fonctionne toujours en régime linéaire ?

### 3.2. Mise en marche et arrêt du véhicule

La tension  $v_2 = k'\theta$  ( $k' = 0,5V/^\circ$ ) est utilisée pour commander la mise en marche et l'arrêt du véhicule. On utilise alors le montage de la figure 9.

On donne :  $R_3 = 1k\Omega$ ,  $R_4 = 16k\Omega$  et  $E = 2,25V$ .

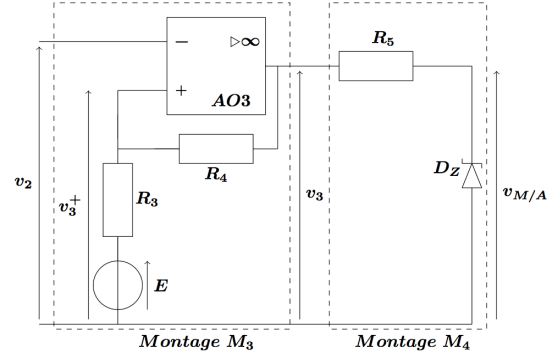


Figure 9

**3.2.1.** Justifier que le montage ( $M_3$ ) fonctionne en régime non linéaire. Indiquer quelles sont les deux valeurs possibles  $v_3'$  et  $v_3''$  ( $v_3' < v_3''$ ) de la tension  $v_3$ .

**3.2.2.** Montrer, en justifiant soigneusement, que la tension  $v_3^+$  à l'entrée non inverseuse de l'AO3 est donnée par :  $v_3^+ = \frac{R_3 v_3 + R_4 E}{R_3 + R_4}$ .

**3.2.3.** On suppose que  $v_3 = v_3'$ . Montrer que ceci est possible si  $v_2 > v_{2s}'$ . Donner l'expression de  $v_{2s}'$ . Calculer sa valeur numérique.

**3.2.4.** Donner la condition sur  $v_2$  de basculement de  $v_3$  à la valeur  $v_3 = v_3''$ . Montrer que  $v_3$  garde cette valeur si  $v_2 < v_{2s}''$ . Donner l'expression de  $v_{2s}''$ . Calculer sa valeur numérique.

**3.2.5.** Donner la condition sur  $v_2$  de basculement de  $v_3$  à la valeur  $v_3 = v_3'$ .

**3.2.6.** Tracer l'allure de la caractéristique  $v_3 = f(v_2)$  du montage ( $M_3$ ). Donner le nom de ce montage ?

Dans le montage ( $M_4$ ) de la figure 9, la diode ZENER est supposée idéale. Elle est caractérisée par :

- une tension seuil nulle dans le sens passant ;
- une résistance dynamique nulle ;
- une tension inverse ZENER  $U_z = 5V$ .

On note  $v_{M/A}$  la tension aux bornes de cette diode.  $v_{M/A}$  commande la mise en marche pour  $v_{M/A} = V_M$  et l'arrêt pour  $v_{M/A} = V_A$  ( $V_A > V_M$ ) du véhicule.

**3.2.7.** Tracer la caractéristique de la diode ZENER.

**3.2.8.** Comment est polarisée la diode pour  $v_3 = v_3'$  et pour  $v_3 = v_3''$  ? Donner les valeurs de  $v_M$  et  $v_A$ .

**3.2.9.** Tracer l'allure de la caractéristique de transfert  $v_{M/A} = f(v_2)$  du montage ( $M_3$ ).

**3.2.10.** Calculer numériquement  $v_{M/A}$  pour  $\theta = +10^\circ$  ;  $\theta = +2^\circ$  et  $\theta = +0^\circ$ . Dire dans chaque cas si le véhicule est mis en marche ou non.

### 3.3. Filtrage du signal du capteur

Le véhicule dispose d'un système de stabilisation gyroscopique qui permet à l'utilisateur, au travers d'un manche vertical, de se déplacer sans être obligé

d'assurer son équilibre. Afin de gérer la variation de vitesse du moteur, le signal  $v_2$  est tout d'abord appliqué à un système électronique. En régime sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  et en utilisant la notation complexe, la fonction de transfert du système est modélisée par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-H_0}{1 + ja\omega}$$

$H_0$  et  $a$  sont des constantes positives. La figure 10 donne le diagramme de BODE en amplitude correspondant à cette fonction de transfert.

- 3.3.1.** Établir l'équation des asymptotes hautes et basses fréquences du filtre.
- 3.3.2.** Déterminer graphiquement à partir du diagramme de BODE, la valeur de la fréquence de coupure  $f_c$  à  $-3dB$  et les valeurs de  $H_0$  et  $a$ . À quel type de filtre peut-on assimiler le système ? Justifier la réponse.
- 3.3.3.** Le revêtement routier produit parfois des vibrations dans le guidon. On choisit alors une fréquence de coupure  $f_c$ . Quel est alors l'apport du montage représenté par la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  pour un véhicule roulant sur une route produisant des vibrations de fréquence plus grande que  $f_c$  ?
- 3.3.4.** On dispose d'un amplificateur opérationnel, de deux résistances et d'un condensateur. Proposer le schéma d'un filtre réalisant la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ .

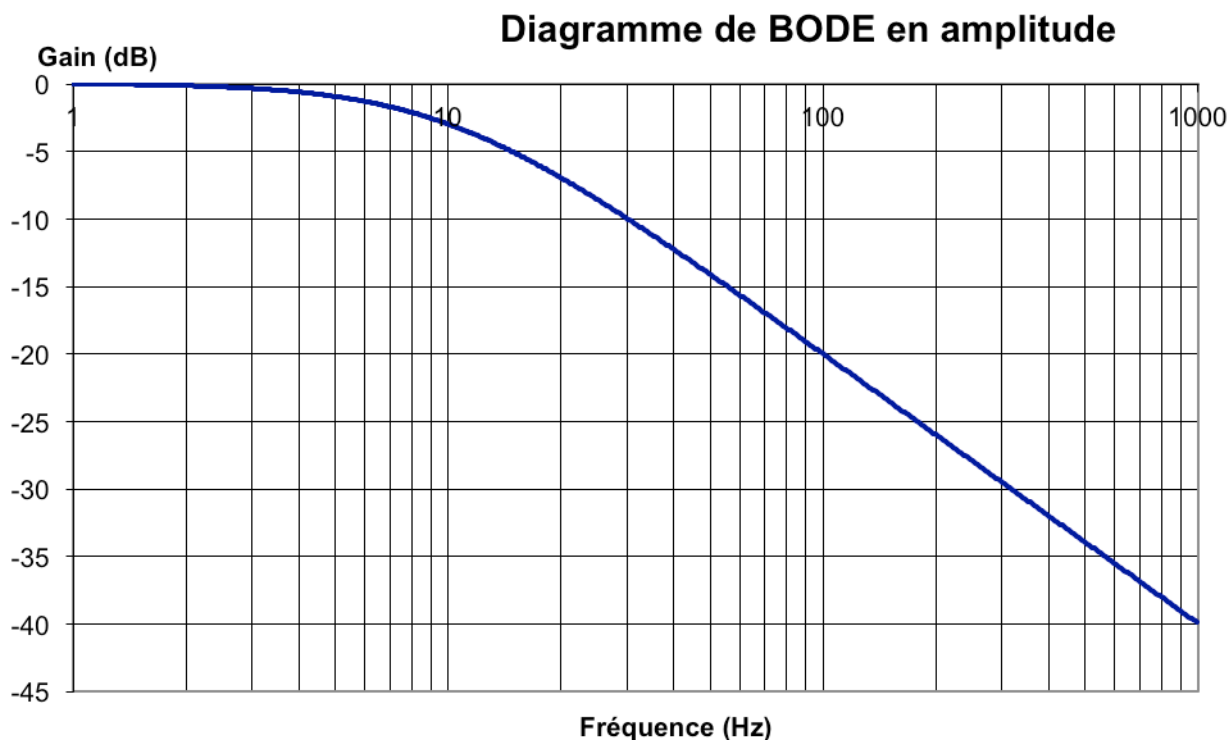


Figure 10